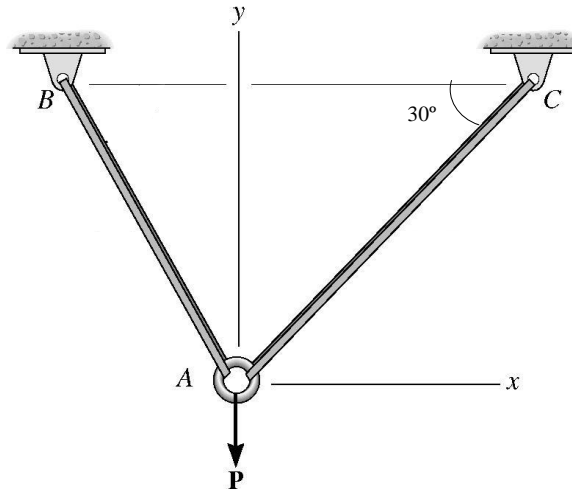
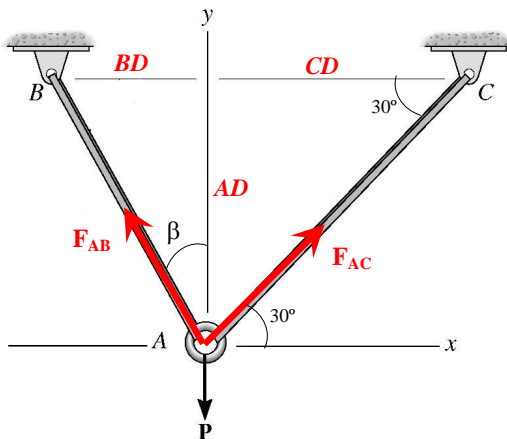


1) Duas barras são usadas para suportar uma carga  $P=6$  kN. O comprimento de AB é 1,20 m, o de AC é 1,6 cm. Encontre os esforços normais nas barras AB e AC para o perfeito equilíbrio estático do nó A, ou seja, calcule os esforços nas barras AB e AC para que a resultante do sistema de forças ao redor de A seja igual a zero.



### Solução:



Para encontrar o lado AD, temos que:

$$\sin(30^\circ) = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{160} \Rightarrow$$

$$AD = 160 \times \sin(30^\circ) = 80 \text{ cm}$$

o ângulo  $\beta$ :

$$\cos(\beta) = \frac{AD}{AB} = \frac{80}{120} \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{80}{120}$$

$$\beta = 48,1897^\circ = 0,841069 \text{ rad}$$

Equações de equilíbrio onde  $F_{AB}$  e  $F_{AC}$  são as forças nas hastes AB e AC, respectivamente.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{AB} \times \sin(\beta) + F_{AC} \times \cos(30^\circ) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} \times \cos(\beta) + F_{AC} \times \sin(30^\circ) - P = 0 \quad (2)$$

Assim temos:

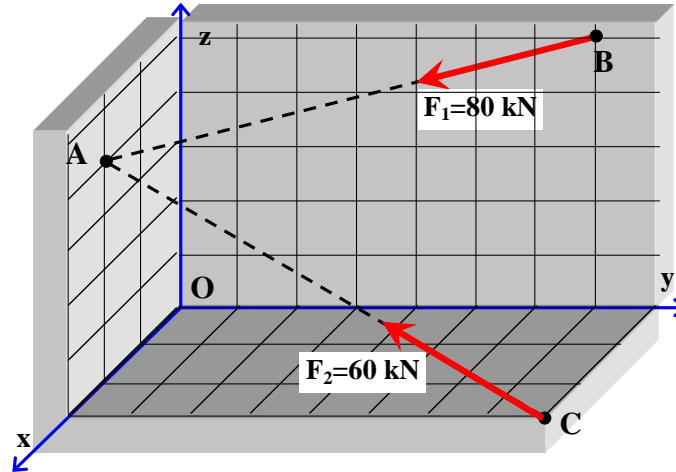
$$F_{AC} = F_{AB} \times \frac{\sin(\beta)}{\cos(30^\circ)} \quad (1)$$

$$F_{AB} \times \cos(\beta) + F_{AB} \times \frac{\sin(\beta)}{\cos(30^\circ)} \times \sin(30^\circ) = 6 \quad (1) \text{ em } (2)$$

$$\Rightarrow F_{AB} = \frac{6}{\cos(\beta) + \sin(\beta)\text{tg}(30^\circ)} = 5,46947 \text{ kN} \quad \Rightarrow F_{AC} = 5,46947 \times \frac{\sin(\beta)}{\cos(30^\circ)} = 4,70737 \text{ kN}$$

**Resposta:** As forças nas barras AB e AC são: **5,47 kN** e **4,71 kN**, respectivamente.

2) Encontre o módulo da força resultante entre as forças  $F_1$  e  $F_2$ . Também, calcule o ângulo entre as forças  $F_1$  e  $F_2$ . Considere o quadriculado composto de quadrados de 20 cm x 20 cm.



### Solução:

As coordenadas dos pontos são:

A(40, 0, 80)

B(0, 140, 100)

C(60, 160, 0)

$$\vec{u}_{BA} = \frac{\vec{r}_{BA}}{\|\vec{r}_{BA}\|} = \frac{(40-0)\vec{i} + (0-140)\vec{j} + (80-100)\vec{k}}{\sqrt{40^2 + 140^2 + 20^2}} = \frac{40\vec{i} - 140\vec{j} - 20\vec{k}}{146,969} = 0,272\vec{i} - 0,953\vec{j} - 0,136\vec{k}$$

$$\vec{u}_{CA} = \frac{\vec{r}_{CA}}{\|\vec{r}_{CA}\|} = \frac{(40-60)\vec{i} + (0-160)\vec{j} + (80-0)\vec{k}}{\sqrt{20^2 + 160^2 + 80^2}} = \frac{-20\vec{i} - 160\vec{j} + 80\vec{k}}{180} = -0,111\vec{i} - 0,889\vec{j} + 0,444\vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = \|\vec{F}_1\| \cdot \vec{u}_{BA} = 80 \cdot \{0,272\vec{i} - 0,953\vec{j} - 0,136\vec{k}\} = 21,77\vec{i} - 76,21\vec{j} - 10,89\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = \|\vec{F}_2\| \cdot \vec{u}_{CA} = 60 \cdot \{-0,111\vec{i} - 0,889\vec{j} + 0,444\vec{k}\} = -6,667\vec{i} - 53,33\vec{j} + 26,67\vec{k}$$

⇒

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \{21,77\vec{i} - 76,21\vec{j} - 10,89\vec{k}\} + \{-6,667\vec{i} - 53,33\vec{j} + 26,67\vec{k}\}$$

∴

$$\vec{F}_R = 15,11\vec{i} - 129,5\vec{j} + 15,78\vec{k}$$

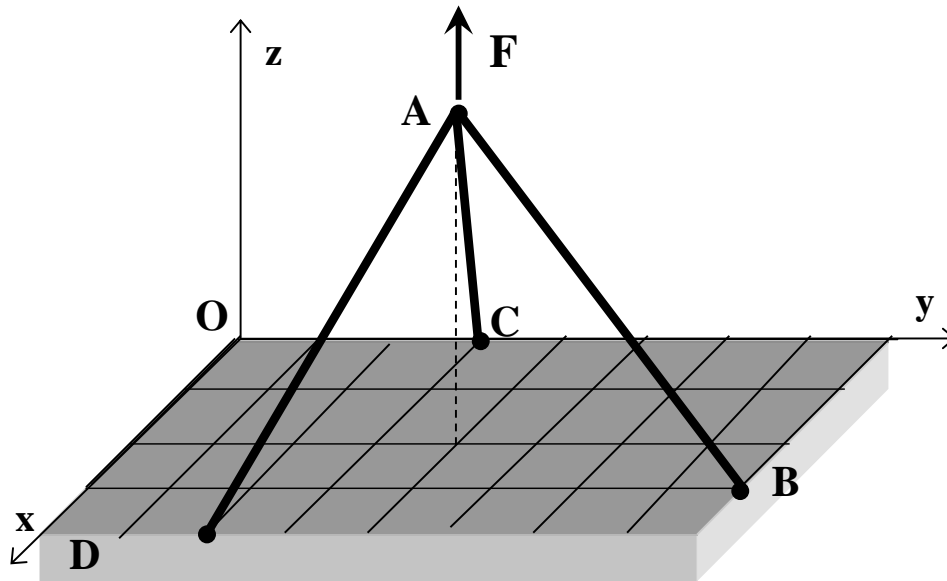
$$\|\vec{F}_R\| = \sqrt{15,11^2 + 129,5^2 + 15,78^2} = 131 \text{ kN}$$

$$\vec{r}_{BA} \cdot \vec{r}_{CA} = 40 \times (-20) + (-140) \times (-160) + (-20) \times 80 = 20000$$

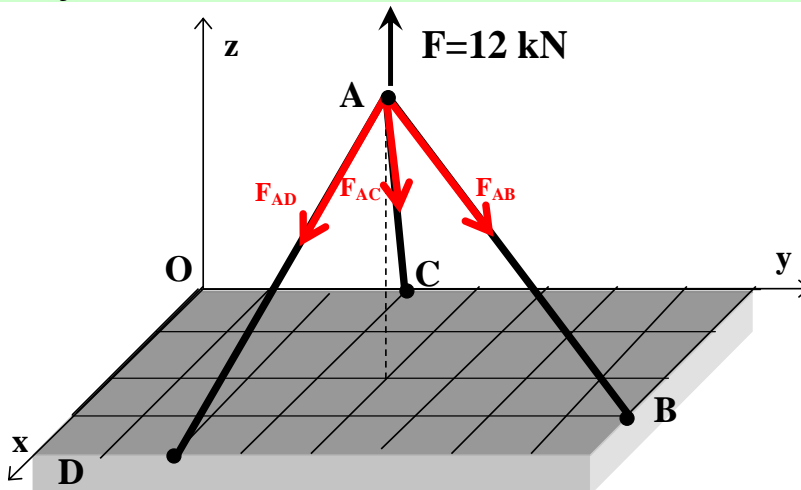
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{BA} \cdot \vec{r}_{CA}}{\|\vec{r}_{BA}\| \cdot \|\vec{r}_{CA}\|}\right) = \arccos\left(\frac{20000}{146,969 \times 180}\right) = 40,9^\circ$$

**Resposta:** O módulo da força resultante entre as forças  $F_1$  e  $F_2$  é **131 kN** e o ângulo entre as forças  $F_1$  e  $F_2$  é **40,9°**.

3) Determine as forças nas barras (AB, AC e AD) necessárias para suportar a força  $F = 12 \text{ kN}$  aplicada no ponto A. O ponto A está a 8 m acima do plano xy. Considere o quadriculado composto de quadrados de 2 m x 2 m.



**Solução:**



As coordenadas dos pontos são:

$$A (4, 8, 8)$$

$$B (6, 16, 0)$$

$$C (0, 6, 0)$$

$$D (8, 4, 0)$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \frac{\vec{r}_{AB}}{\|\vec{r}_{AB}\|} = \frac{(6-4)\vec{i} + (16-8)\vec{j} + (0-8)\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 8^2 + 8^2}} = \{0,174078 \vec{i} + 0,696311 \vec{j} - 0,696311 \vec{k}\} F_{AB}$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \frac{\vec{r}_{AC}}{\|\vec{r}_{AC}\|} = \frac{(0-4)\vec{i} + (6-8)\vec{j} + (0-8)\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2}} = \{-0,436436 \vec{i} - 0,218218 \vec{j} - 0,872872 \vec{k}\} F_{AC}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \frac{\vec{r}_{AD}}{\|\vec{r}_{AD}\|} = \frac{(8-4)\vec{i} + (4-8)\vec{j} + (0-8)\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2}} = \{0,408248 \vec{i} - 0,408248 \vec{j} - 0,816497 \vec{k}\} F_{AD}$$

O equilíbrio é conseguido quando:

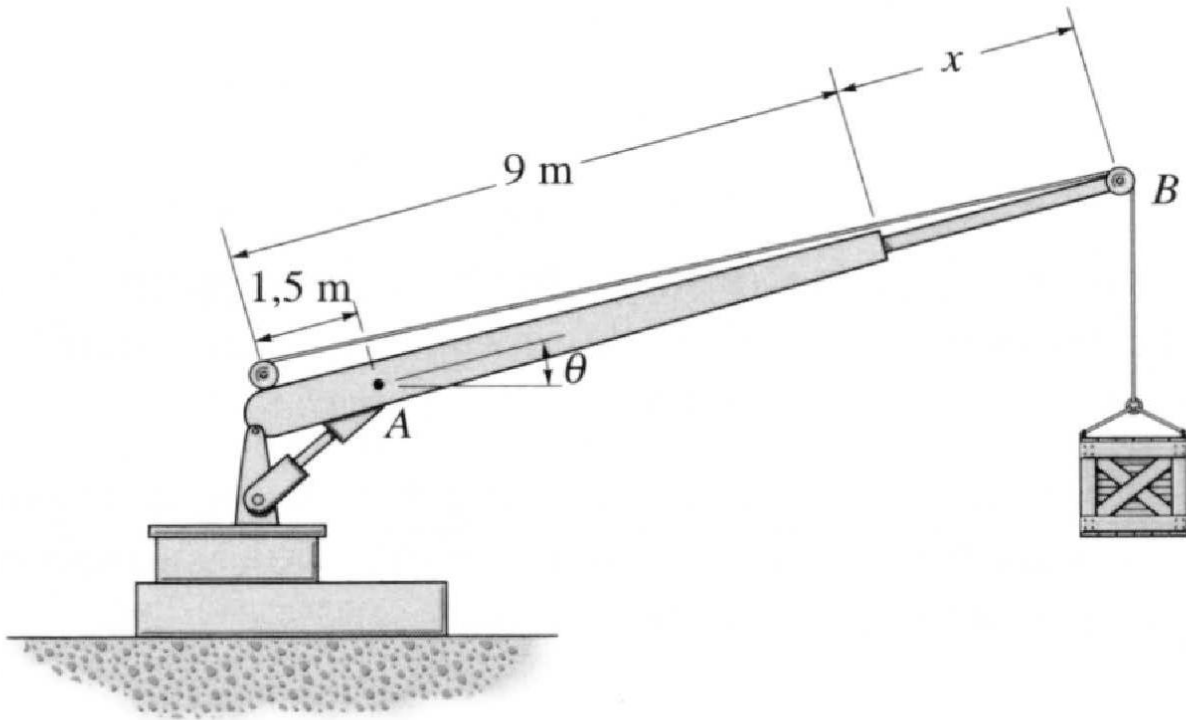
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} 0,174078 - F_{AC} 0,436436 + F_{AD} 0,408248 = 0 \quad F_{AB} = 4,49574 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} 0,696311 - F_{AC} 0,218218 - F_{AD} 0,408248 = 0 \quad \Rightarrow F_{AC} = 5,97727 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -F_{AB} 0,696311 - F_{AC} 0,872872 - F_{AD} 0,816497 + 12 = 0 \quad F_{AD} = 4,47298 \text{ kN}$$

**Resposta:** As forças  $F_{AB}$ ,  $F_{AC}$  e  $F_{AD}$  têm módulos **4,50 kN**, **5,98 kN** e **4,47 kN**, respectivamente.

4) O guindaste pode ser ajustado para qualquer ângulo  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  e qualquer extensão  $0 \leq x \leq 5$  m. Para uma massa suspensa de 120 kg, determine o momento desenvolvido em A como função de  $x$  e  $\theta$ . Quais valores de  $x$  e  $\theta$  conduzem ao máximo momento possível em A? Calcule esse momento. Despreze as dimensões da polia em B. Adote  $g=9,81$  m/s<sup>2</sup>.



$$M_A = (120 \times 9,81) \times (7,5 + x) \times \cos(\theta) = 1177,2 \times \cos(\theta) \times (7,5 + x) \quad \text{em N.m no sentido horário}$$

O máximo momento em A ocorre quando  $\theta = 0^\circ$  e  $x = 5$  m, então:

$$(M_A)_{\max} = 1177,2 \times \cos(0) \times (7,5 + 5) = 1177,2 \times 12,5$$

$$\therefore (M_A)_{\max} = 14715 \text{ N.m} = 14,715 \text{ kN.m}$$

**Resposta:** O momento desenvolvido em A é  $M_A = 1177,2 \times \cos(\theta) \times (7,5 + x)$  em N.m no sentido horário. O máximo momento possível em A é **14,7 kN.m**.