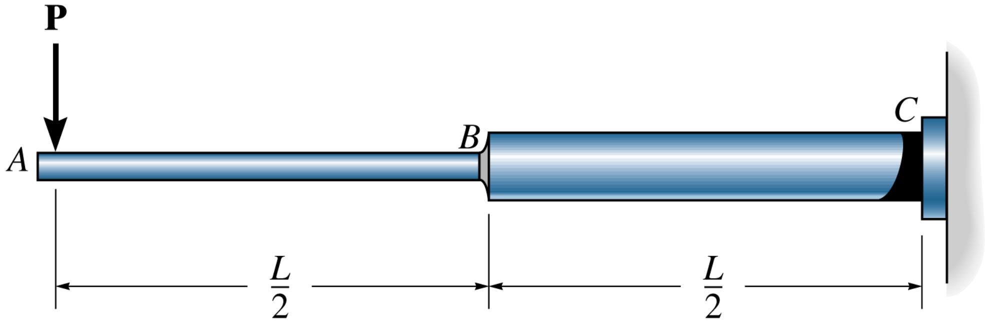
12.49 A haste compõe-se de dois eixos para os quais o momento de inércia de AB é I e de BC é 2I. Determinar a inclinação e a deflexão máximas da haste devido ao carregamento. O módulo de elasticidade é E.



Solução:

Vamos encontrar as equações de momento fletor:

$$M_1 = -Px \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$M_2 = -Px \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \le x \le L$$

Agora, vamos montar as equações diferenciais da linha elástica (uma para cada trecho):

$$EI\, y_1''(x) = Px \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$2EI\, y_2''(x) = Px \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \le x \le L$$

E, assim, resolvê-las através de duas integrações.

Primeira integração:

$$EI\, y_1'(x) = P\frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$2EI\, y_2'(x) = P\frac{x^2}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \le x \le L$$

Segunda integração:

$$EI\, y_1(x) = P\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_3 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$2EI\, y_2(x) = P\frac{x^3}{6} + C_2 x + C_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \le x \le L$$

As condições de contorno para a viga são:

$$y'_2(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{PL^2}{2}$$

$$y_2(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = \frac{PL^3}{3}$$

$$y'_1\left(\frac{L}{2}\right) = y'_2\left(\frac{L}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{5PL^2}{16}$$

$$y_1\left(\frac{L}{2}\right) = y_2\left(\frac{L}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{3PL^3}{16}$$

A inclinação máxima (extremidade livre, x=0) é:

$$EI\ y_1'(x) = P\frac{x^2}{2} - \frac{5PL^2}{16} \quad \Rightarrow \quad EI\ y_1'(0) = P\frac{0^2}{2} - \frac{5PL^2}{16} = -\frac{5PL^2}{16}$$

$$\therefore y_1'(0) = \theta_{max} = -\frac{5PL^2}{16EI}$$

O deslocamento máximo (extremidade livre, x=0) é:

$$EI\ y_1(x) = P\frac{x^3}{6} - \frac{5PL^2}{16}x + \frac{3PL^3}{16} \quad \Rightarrow \quad EI\ y_1(0) = P\frac{0^3}{6} - \frac{5PL^2}{16}0 + \frac{3PL^3}{16} = \frac{3PL^3}{16}$$

$$\therefore y_1(0) = y_{max} = \frac{3PL^3}{16EI}$$

Obs.: o eixo y positivo foi adotado para baixo.