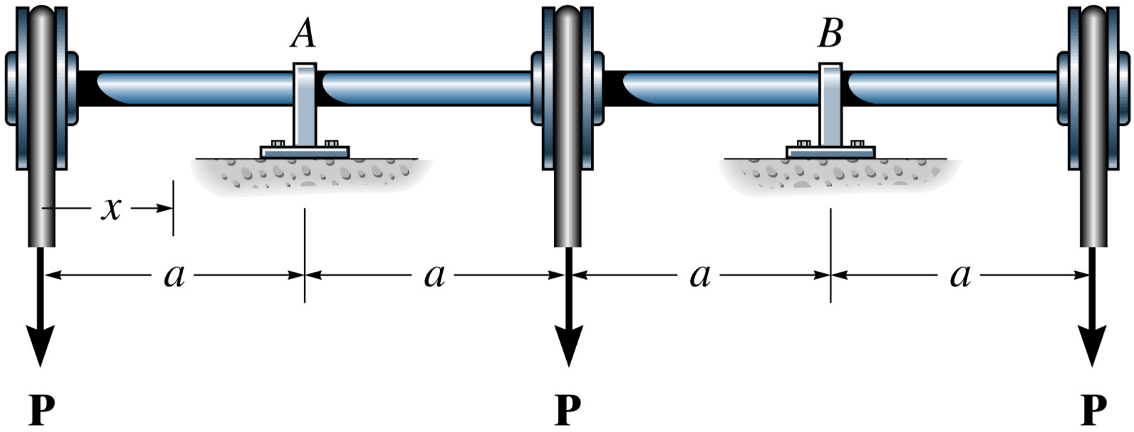
**12.30** O eixo suporta as cargas das três polias mostradas. Determinar a deflexão em seu centro e sua inclinação em A e B. Os mancais exercem apenas reações verticais sobre ele e EI é constante.




**Solução:**

Reações de apoio:

$$V_A = \frac{3P}{2} \qquad V_B = \frac{3P}{2}$$

As equações de momento fletor são:

$$M_1(x) = -Px \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le a$$

$$M_2(x) = -Px + \frac{3P}{2}(x-a) \quad \Rightarrow \quad a \le x \le 2a$$

$$M_3(x) = -Px + \frac{3P}{2}(x-a) - P(x-2a) \quad \Rightarrow \quad 2a \le x \le 3a$$

$$M_4(x) = -Px + \frac{3P}{2}(x-a) - P(x-2a) + \frac{3P}{2}(x-3a) \quad \Rightarrow \quad 3a \le x \le 4a$$

Agora, vamos montar as equações diferenciais da linha elástica (uma para cada trecho):

$$EIy_1''(x) = Px \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le a$$

$$EIy_2''(x) = Px - \frac{3P}{2}(x-a) \quad \Rightarrow \quad a \le x \le 2a$$

$$EIy_3''(x) = Px - \frac{3P}{2}(x-a) + P(x-2a) \quad \Rightarrow \quad 2a \le x \le 3a$$

$$EIy_4''(x) = Px - \frac{3P}{2}(x-a) + P(x-2a) - \frac{3P}{2}(x-3a) \quad \Rightarrow \quad 3a \le x \le 4a$$

E, assim, resolvê-las através de duas integrações. Primeira integração:

$$EIy_1'(x) = P\frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le a$$

$$EIy_2'(x) = P\frac{x^2}{2} - \frac{3P}{2}\frac{(x-a)^2}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad a \le x \le 2a$$

$$EIy_3'(x) = P\frac{x^2}{2} - \frac{3P}{2}\frac{(x-a)^2}{2} + P\frac{(x-2a)^2}{2} + C_3 \quad \Rightarrow \quad 2a \le x \le 3a$$

$$EIy_4'(x) = P\frac{x^2}{2} - \frac{3P}{2}\frac{(x-a)^2}{2} + P\frac{(x-2a)^2}{2} - \frac{3P}{2}\frac{(x-3a)^2}{2} + C_4 \quad \Rightarrow \quad 3a \le x \le 4a$$

Segunda integração:

$$EIy_1(x) = P\frac{x^3}{6} + C_1x + C_5 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le a$$

$$EIy_2(x) = P\frac{x^3}{6} - \frac{3P}{2}\frac{(x-a)^3}{6} + C_2x + C_6 \quad \Rightarrow \quad a \le x \le 2a$$

$$EIy_3(x) = P\frac{x^3}{6} - \frac{3P}{2}\frac{(x-a)^3}{6} + P\frac{(x-2a)^3}{6} + C_3x + C_7 \quad \Rightarrow \quad 2a \le x \le 3a$$

$$EIy_4(x) = P\frac{x^3}{6} - \frac{3P}{2}\frac{(x-a)^3}{6} + P\frac{(x-2a)^3}{6} - \frac{3P}{2}\frac{(x-3a)^3}{6} + C_4x + C_8 \quad \Rightarrow \quad 3a \le x \le 4a$$

As condições de contorno para a viga são:

$$y'_1(a) = y'_2(a) \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2$$

$$y_1(a) = y_2(a) \quad \Rightarrow \quad C_5 = C_6$$

$$y'_2(2a) = y'_3(2a) \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_3$$

$$y_2(2a) = y_3(2a) \quad \Rightarrow \quad C_6 = C_7$$

$$y'_3(3a) = y'_4(3a) \quad \Rightarrow \quad C_3 = C_4$$

$$y_3(3a) = y_4(3a) \quad \Rightarrow \quad C_7 = C_8$$

$$EIy_1(a) = P\frac{a^3}{6} + C_1a + C_5 = 0$$

$$EIy_3(3a) = P\frac{(3a)^3}{6} - \frac{3P}{2}\frac{(3a-a)^3}{6} + P\frac{(3a-2a)^3}{6} + C_3 3a + C_7 = 0$$

das duas últimas equações (fazendo $C_1$=$C_3$ e $C_5$=$C_7$) vem que:

$$C_1 = C_2 = C_3 = -\frac{5P}{4}a^2$$

$$C_4 = C_5 = C_6 = \frac{13P}{12}a^3$$

A deflexão no centro (centro, x=2a) é:

$$EIy_2(2a) = P\frac{(2a)^3}{6} - \frac{3P}{2}\frac{(2a-a)^3}{6} - \frac{5Pa^2}{4}2a + \frac{13P}{12}a^3$$

$$\therefore y_2(2a) = y_{2a} = -\frac{Pa^3}{3EI}$$

As inclinações em A e B são:

$$EI\ y_1'(a) = P\frac{a^2}{2} + C_1 = \frac{Pa^2}{2} - \frac{5Pa^2}{4} = -\frac{3Pa^2}{4}$$

$$\therefore y_1'(a) = \theta_A = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$

$$EIy_3'(3a) = P\frac{(3a)^2}{2} - \frac{3P}{2}\frac{(3a-a)^2}{2} + P\frac{(3a-2a)^2}{2} - \frac{5Pa^2}{4}$$

$$\therefore y_3'(3a) = \theta_B = \frac{3Pa^2}{4EI}$$

Obs.: o eixo y positivo foi adotado para baixo.