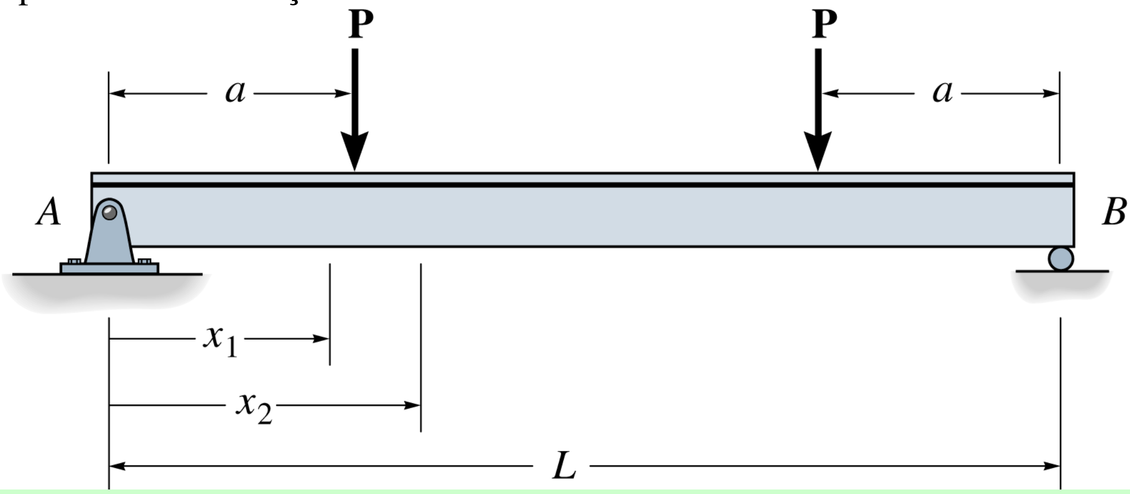
12.5 Determinar as equações da linha elástica da viga usando as coordenadas x1 e x2. Especificar a inclinação em A e a deflexão máxima. Considerar EI constante.



Solução:

Reações de apoio:

$$\sum M_{z(B)} = 0 \Rightarrow V_A \times L - P(L-a) - Pa = 0 \quad \therefore V_A = P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P - P = 0 \quad \therefore V_B = P$$

Vamos encontrar as equações de momento fletor:

$$M_1 = Px \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le a$$

$$M_2 = Px - P(x-a) \quad \Rightarrow \quad a \le x \le (L-a)$$

$$M_3 = Px - P(x-a) - P(x-L+a) \quad \Rightarrow \quad (L-a) \le x \le L$$

Agora, vamos montar as equações diferenciais da linha elástica (uma para cada trecho):

$$E\,I\,y_1''(x) = -Px \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le a$$

$$E\,I\,y_2''(x) = -Px + P(x-a) \quad \Rightarrow \quad a \le x \le (L-a)$$

$$E\,I\,y_3''(x) = -Px + P(x-a) + P(x-L+a) \quad \Rightarrow \quad (L-a) \le x \le L$$

E, assim, resolvê-las através de duas integrações.

Primeira integração:

$$E\,I\,y_1'(x) = -P\frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le a$$

$$E\,I\,y_2'(x) = -P\frac{x^2}{2} + P\frac{(x-a)^2}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad a \le x \le (L-a)$$

$$E\,I\,y_3'(x) = -P\frac{x^2}{2} + P\frac{(x-a)^2}{2} + P\frac{(x-L+a)^2}{2} + C_3 \quad \Rightarrow \quad (L-a) \le x \le L$$

Segunda integração:

$$E\,I\,y_1(x) = -P\frac{x^3}{6} + C_1x + C_4 \Rightarrow \quad 0 \le x \le a$$

$$E\,I\,y_2(x) = -P\frac{x^3}{6} + P\frac{(x-a)^3}{6} + C_2x + C_5 \quad \Rightarrow \quad a \le x \le (L-a)$$

$$E\,I\,y_3(x) = -P\frac{x^3}{6} + P\frac{(x-a)^3}{6} + P\frac{(x-L+a)^3}{6} + C_3x + C_6 \quad \Rightarrow \quad (L-a) \le x \le L$$

As condições de contorno para a viga são:

$$y'_1(a) = y'_2(a) \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2$$

$$y_1(a) = y_2(a) \quad \Rightarrow \quad C_4 = C_5$$

$$y'_2(L-a) = y'_3(L-a) \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_3$$

$$y_2(L-a) = y_3(L-a) \quad \Rightarrow \quad C_5 = C_6$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E\,I\,y_1(0) = C_4 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_6 = 0$$

$$y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad E\,I\,y_3(L) = -P\frac{L^3}{6} + P\frac{(L-a)^3}{6} + P\frac{(L-L+a)^3}{6} + C_3 L = 0 \ \Rightarrow$$

$$\therefore C_3 = \frac{Pa}{2}(L-a)$$

$$\therefore C_1 = \frac{Pa}{2}(L-a) \qquad \therefore C_2 = \frac{Pa}{2}(L-a)$$

Então, as inclinações são:

$$E\,I\,y_1'(x) = -P\frac{x^2}{2} + \frac{Pa}{2}(L-a) \ \Rightarrow \ 0 \le x \le a$$

$$E\,I\,y_2'(x) = -P\frac{x^2}{2} + P\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{Pa}{2}(L-a) \ \Rightarrow \ a \le x \le (L-a)$$

$$E\,I\,y_3'(x) = -P\frac{x^2}{2} + P\frac{(x-a)^2}{2} + P\frac{(x-L+a)^2}{2} + \frac{Pa}{2}(L-a) \ \Rightarrow \ (L-a) \le x \le L$$

E as deflexões são:

$$E\,I\,y_1(x) = -P\frac{x^3}{6} + \frac{Pa}{2}(L-a)x \ \Rightarrow \ 0 \le x \le a$$

$$E\,I\,y_2(x) = -P\frac{x^3}{6} + P\frac{(x-a)^3}{6} + \frac{Pa}{2}(L-a)x \ \Rightarrow \ a \le x \le (L-a)$$

$$E\,I\,y_3(x) = -P\frac{x^3}{6} + P\frac{(x-a)^3}{6} + P\frac{(x-L+a)^3}{6} + \frac{Pa}{2}(L-a)x \ \Rightarrow \ (L-a) \le x \le L$$

A inclinação em A é:

$$E\,I\,y_1'(0) = -P\frac{0^2}{2} + \frac{Pa}{2}(L-a) = \frac{Pa}{2}(L-a)$$

$$\therefore y_1'(0) = \theta_A = \frac{Pa(L-a)}{2EI}$$

O deslocamento máximo (centro, x=L/2) é:

$$E\,I\,y_2\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{P}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{P}{6}\left(\frac{L}{2} - a\right)^3 + \frac{Pa}{2}(L-a)\frac{L}{2}$$

$$\therefore y_2\left(\frac{L}{2}\right) = y_{max} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2)$$

Obs.: o eixo y positivo foi adotado para baixo.