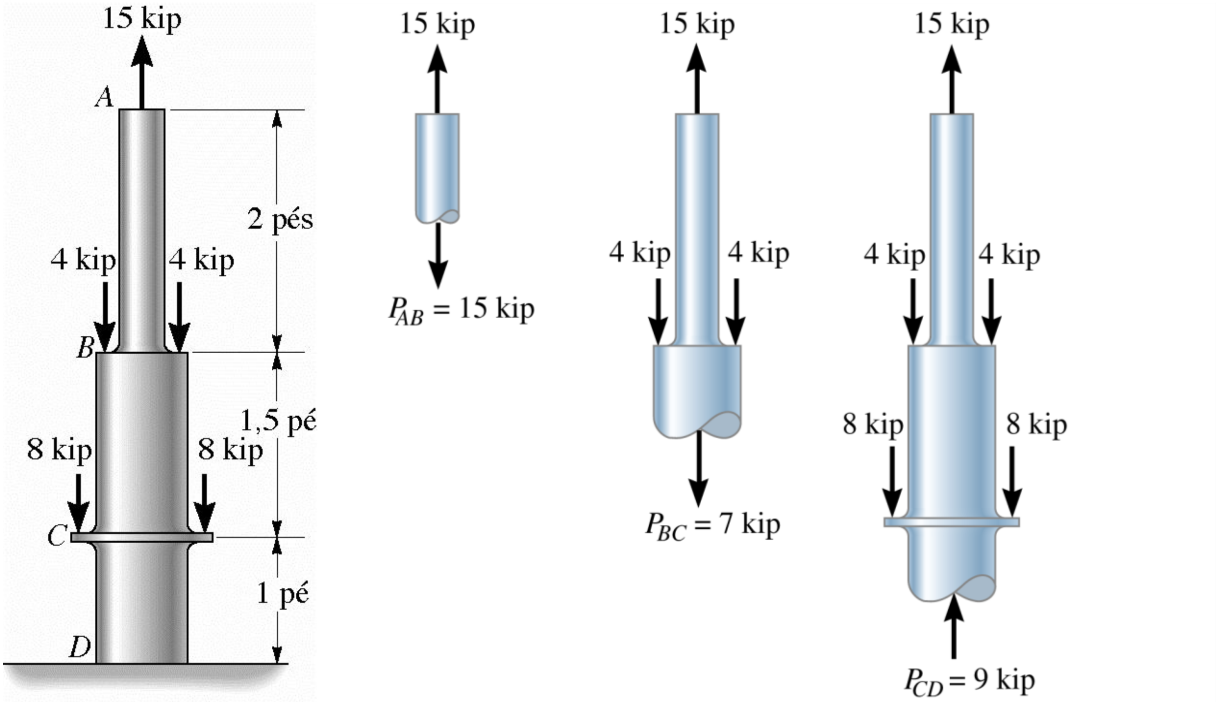
Exemplo 1- A barra composta de aço A-36 (E=29000 ksi) mostrada na figura abaixo está composta por dois segmentos, AB e BD, com áreas da seção transversal A_{AB}=1 pol^2 e A_{BD}=2 pol^2. Determinar o deslocamento vertical da extremidade A e o deslocamento de B em relação a C.



Solução:

Dados:

$E_{aço}$ = 29000 ksi = 29×10^6 psi = 29×10^6 lbf/pol^2

A_{ab} = 1 pol^2
A_{bd} = 2 pol^2

L_{AB} = 2,0 pés = 24 pol
L_{BC} = 1,5 pés = 18 pol
L_{CD} = 1,0 pés = 12 pol

P_{AB} = 15 kip = 15000 lbf
P_{BC} = 7 kip = 7000 lbf
P_{CD} = –9 kip = –9000 lbf

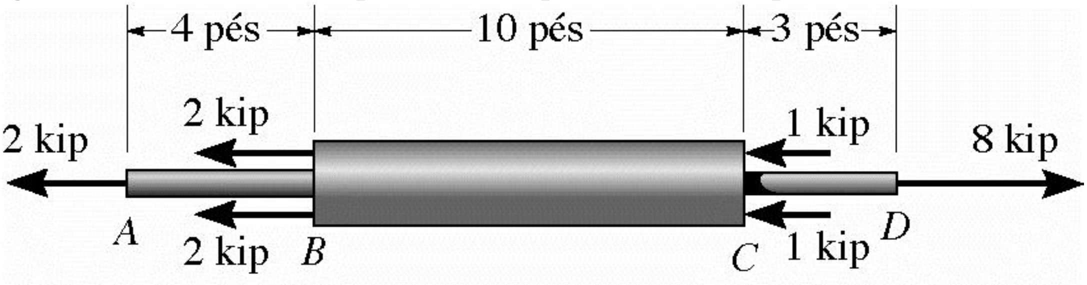
$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} \Rightarrow \delta_A = \frac{P_{AB} L_{AB}}{E_{aço} A_{ab}} + \frac{P_{BC} L_{BC}}{E_{aço} A_{bd}} + \frac{P_{CD} L_{CD}}{E_{aço} A_{bd}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_A = \frac{15000 \times 24}{29 \times 10^6 \times 1} + \frac{7000 \times 18}{29 \times 10^6 \times 2} - \frac{9000 \times 12}{29 \times 10^6 \times 2} = 0{,}01272 \text{ pol}$$

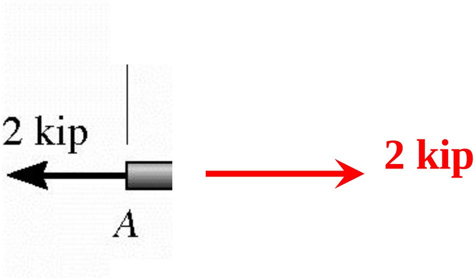
$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} \Rightarrow \delta_B = \frac{P_{BC} L_{BC}}{E_{aço} A} \Rightarrow \delta_B = \frac{7000 \times 18}{29 \times 10^6 \times 2} = 0{,}002172 \text{ pol}$$

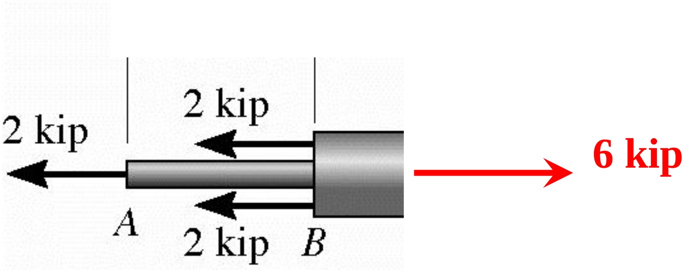
Resposta: O deslocamento da extremidade A é de **0,0127 pol** e o deslocamento de B em relação a C é de **0,00217 pol**.

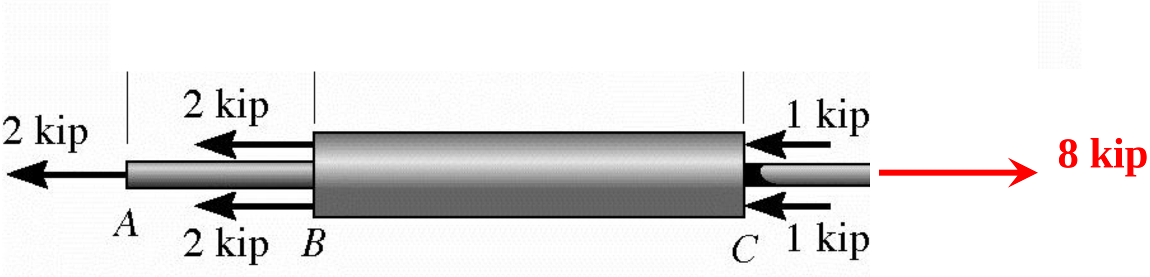
4.4. O eixo de bronze C86100 está submetido às cargas axiais mostradas. Determinar o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D se os diâmetros de cada segmento são d_{AB} = 0,75 pol, d_{BC} = 2 pol e d_{CD} = 0,5 pol.



Solução:







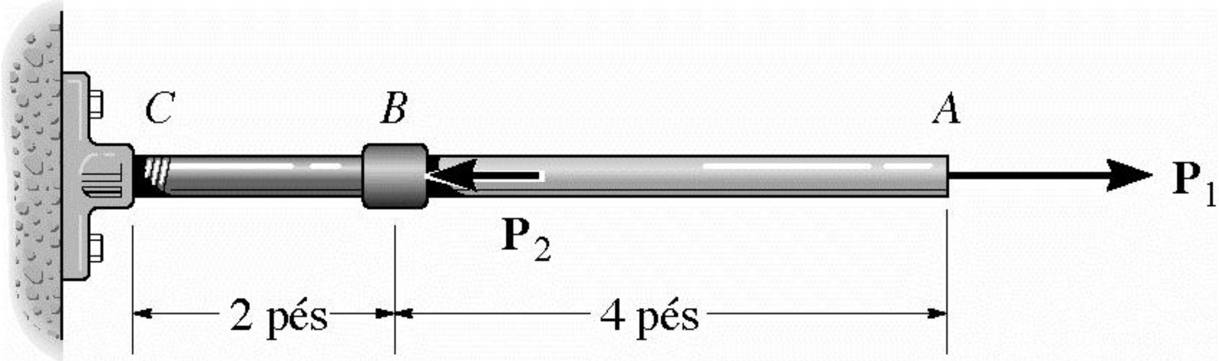
Utilizando módulo de elasticidade do bronze = 15×10^6 psi e as unidades libra-força e polegada, temos:

$$\delta_{AD} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} \Rightarrow \delta_{AD} = \frac{N_{AB}L_{AB}}{E_{Cu}A_{ab}} + \frac{N_{BC}L_{BC}}{E_{Cu}A_{bd}} + \frac{N_{CD}L_{CD}}{E_{Cu}A_{bd}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_A = \frac{2000\times48}{15\times10^6\times\frac{\pi\,0{,}75^2}{4}} + \frac{6000\times120}{15\times10^6\times\frac{\pi\,2^2}{4}} - \frac{8000\times36}{15\times10^6\times\frac{\pi\,0{,}5^2}{4}} = 0{,}128\ \text{pol}$$

Resposta: O deslocamento da extremidade A em relação a D é de **0,128 pol**.

4.6- O conjunto consiste de uma haste CB de aço A-36 e de uma haste BA de alumínio 6061-T6, cada uma com diâmetro de 1 pol. Se a haste está sujeita a uma carga axial P_1 = 12 kip em A e P_2 = 18 kip na conexão B, determinar o deslocamento da conexão e da extremidade A. O comprimento de cada segmento sem alongamento é mostrado na figura. Desprezar o tamanho das conexões em B e C e supor que sejam rígidas.



Solução:

Dados:

$E_{aço}$ = 29000 ksi = 29×10^6 psi = 29×10^6 lbf/pol²

$E_{alumínio}$ = 10000 ksi = 10×10^6 psi = 10×10^6 lbf/pol²

d = 1 pol

L_{AB} = 4 pés = 48 pol

L_{BC} = 2 pés = 24 pol

$N_{AB} = P_1$ = 12 kip = 12000 lbf

$N_{BC} = P_1 - P_2$ = 12-18 = -6 kip = -6000 lbf

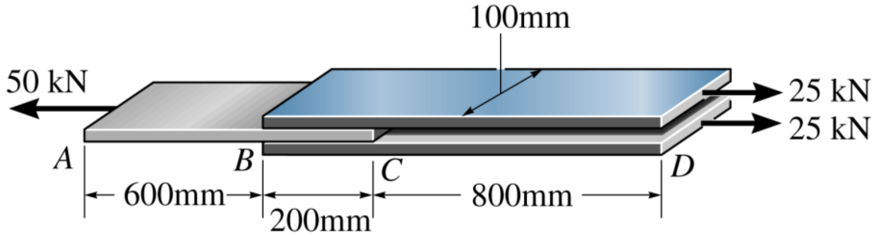
$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1\,\text{pol})^2}{4} = 0{,}785398\,\text{pol}^2$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} \Rightarrow \delta_A = \frac{N_{AB} L_{AB}}{E_{alumínio} A} + \frac{N_{BC} L_{BC}}{E_{aço} A} \Rightarrow \delta_A = \frac{12000 \times 48}{10\times10^6 \times 0{,}785398} + \frac{-6000\times 24}{29\times10^6 \times 0{,}785398} = 0{,}0670\,\text{pol}$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} \Rightarrow \delta_B = \frac{N_{BC} L_{BC}}{E_{aço} A} \Rightarrow \delta_B = \frac{-6000\times 24}{29\times10^6 \times 0{,}785398} = -0{,}00632\,\text{pol}$$

Resposta: O deslocamento da extremidade A é de **0,0670 pol** e o deslocamento da conexão é de **-0,00632 pol**.

4.8- A junta é feita de três chapas de aço A-36 ligadas pelas suas costuras. Determinar o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D quando a junta é submetida às cargas axiais mostradas. Cada chapa tem espessura de 6 mm.



Solução:

Dados:

a) Esforços normais:

$N_{AB} = N_{BC} = N_{CD} = 50$ kN

b) Comprimentos:

$L_{AB} = 600$ mm
$L_{BC} = 200$ mm
$L_{CD} = 800$ mm

c) Módulos de Elasticidade:

$E_{AB} = E_{BC} = E_{CD} = 200$ GPa $= 200$ kN/mm^2

d) Áreas das seções transversais:

$A_{AB} = 6 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} = 600 \text{ mm}^2$
$A_{BC} = 3 \times (6 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}) = 1800 \text{ mm}^2$
$A_{CD} = 2 \times (6 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}) = 1200 \text{ mm}^2$

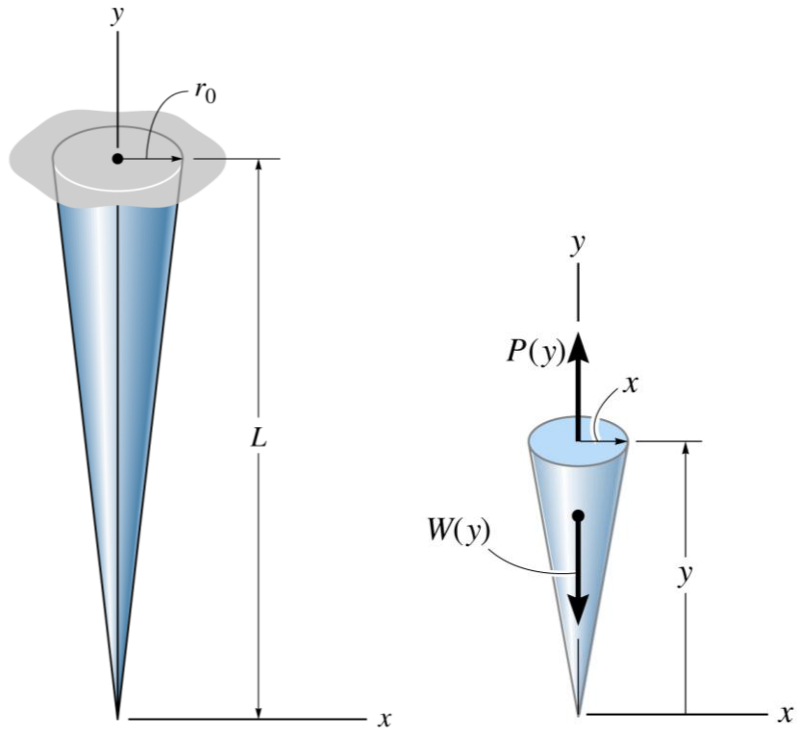
Assim:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} \Rightarrow \delta_{AD} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = \frac{N_{AB} L_{AB}}{E_{AB} A_{AB}} + \frac{N_{BC} L_{BC}}{E_{BC} A_{BC}} + \frac{N_{CD} L_{CD}}{E_{CD} A_{CD}} \Rightarrow$$

$$\delta_{AD} = \frac{50 \times 600}{200 \times 600} + \frac{50 \times 200}{200 \times 1800} + \frac{50 \times 800}{200 \times 1200} = 0,44444 \text{ mm}$$

Resposta: O deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D quando a junta é submetida às cargas axiais indicadas é **0,444 mm**.

Exemplo2 – Um elemento é feito de um material com peso específico γ e módulo de elasticidade E. Supondo que ele tenha formato de cone e as dimensões mostradas na figura abaixo, determinar a distância que sua extremidade é deslocada devido à gravidade quando suspenso na posição vertical.



Solução:

Força Interna. A força axial interna varia ao longo do elemento, visto que depende do peso W(y) de um segmento do elemento abaixo de qualquer seção. Então, para calcular o deslocamento devemos usar a equação integral. Na seção localizada a uma distância y da extremidade inferior, o raio x, em função de y, é determinado por proporção. Isto é:

$$\frac{x}{y} = \frac{r_0}{L} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r_0}{L}\, y$$

O volume de um cone com raio da base x e altura y é:

$$V = \frac{\pi}{3}\, y\, x^2 = \frac{\pi}{3}\, y \left(\frac{r_0}{L}\, y\right)^2 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi\, r_0^2}{3L^2}\, y^3$$

Como W = γV, a força interna na seção torna-se:

$$P(y) = \frac{\gamma\, \pi\, r_0^2}{3L^2}\, y^3$$

Deslocamento. A área da seção transversal também é função de y. Logo,

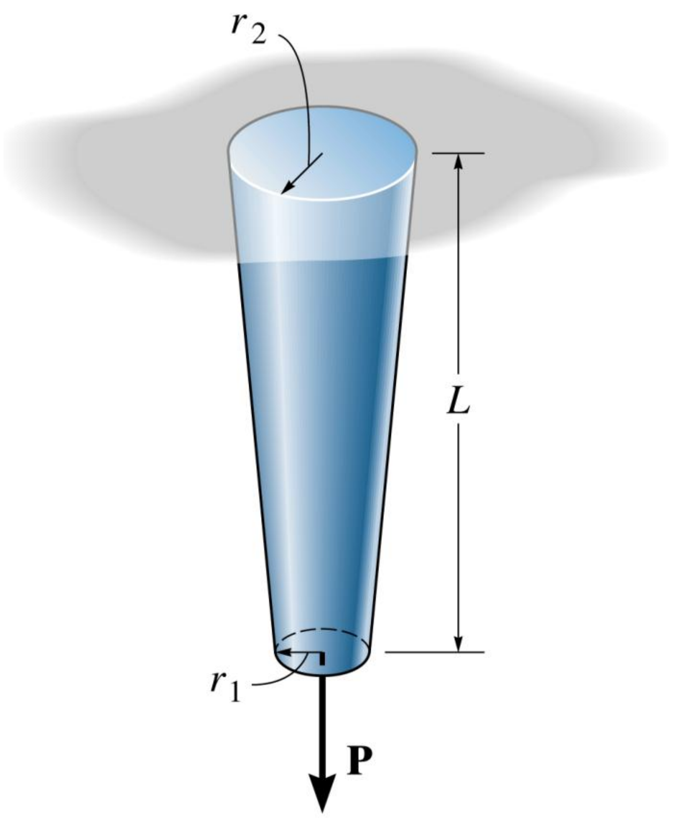
$$A(y) = \pi x^2 = \frac{\pi\, r_0^2}{L^2}\, y^2$$

Aplicando a equação integral para cálculo do alongamento entre os limites y=0 e y=L, temos:

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y)\, dy}{E\, A(y)} = \int_0^L \frac{\frac{\gamma\, \pi\, r_0^2}{3L^2}\, y^3\, dy}{E\, \frac{\pi\, r_0^2}{L^2}\, y^2} = \frac{\gamma}{3\,E} \int_0^L y\, dy \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\gamma\, L^2}{6\,E}$$

Resposta: A extremidade do cone se deslocará de **$\gamma L^2/(6E)$** devido à gravidade quando suspenso na posição vertical

4.28. A haste é ligeiramente cônica e tem comprimento L. Está suspensa do teto e suporta uma carga P em sua extremidade. Mostrar que o deslocamento de sua extremidade devido a essa carga é $\delta = PL/(\pi E r_1 r_2)$. Desprezar o peso do material. O módulo de elasticidade é E.



Solução:

Variação do raio r(x): da extremidade livre da haste (x=0) até o apoio (x=L)

$$r(x) = \frac{r_2 - r_1}{L}x + r_1$$

Área da seção transversal distante x da extremidade:

$$A(x) = \pi\, r(x)^2 = \pi\left[\frac{r_2 - r_1}{L}x + r_1\right]^2 \quad \therefore\ A(x) = \frac{\pi}{L^2}\left(r_2 - r_1 x + r_1 L\right)^2$$

Deslocamento da extremidade livre ou alongamento da haste:

$$\delta = \int_0^L \frac{P\,dx}{E\,A(x)} = \int_0^L \frac{P\,dx}{E\,\frac{\pi}{L^2}\left[(r_2 - r_1)x + r_1 L\right]^2} = -\frac{P\,L^2}{\pi\,E}\left[\frac{1}{\left[(r_2 - r_1)x + r_1 L\right]}\cdot\frac{1}{(r_2 - r_1)}\right]_0^L$$

$$= -\frac{P\,L^2}{\pi\,E\,(r_2 - r_1)}\left[\frac{1}{r_2 L} - \frac{1}{r_1 L}\right] = -\frac{P\,L^2}{\pi\,E\,(r_2 - r_1)}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1\,r_2\,L}\right) = \frac{P\,L^2}{\pi\,E\,(r_2 - r_1)}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1\,r_2\,L}\right)$$

$$\therefore\ \delta = \frac{P\,L}{\pi\,E\,r_1\,r_2}$$

Resposta: O deslocamento da extremidade da haste devido a carga P é $\delta = PL/(\pi E r_1 r_2)$, c.q.d.