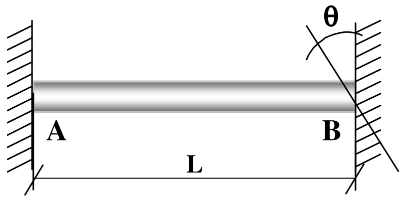
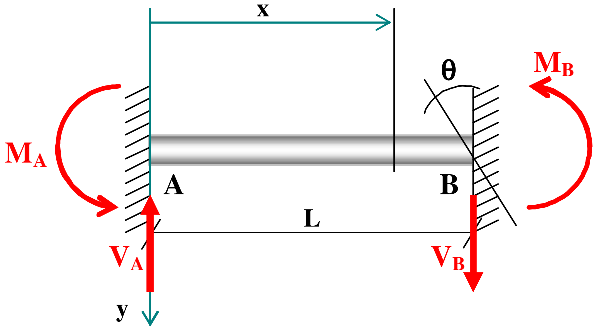
Encontre a equação da linha elástica e as reações de apoio para a viga engastada com rotação θ no sentido anti-horário em B como vista na figura ao lado.



Solução:



Equação dos momentos fletores:

$$M(x) = V_A x - M_A \quad \Rightarrow 0 \le x \le L$$

Equação diferencial da linha elástica:

$$EIy''(x) = -V_A x + M_A \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Integrando uma vez:

$$EIy'(x) = -V_A \frac{x^2}{2} + M_A x + C_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Integrando Mais uma vez:

$$EIy(x) = -V_A \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Condições de contorno:

$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow EIy(L) = -V_A \frac{L^3}{6} + M_A \frac{L^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow M_A = V_A \frac{L}{3}$$

$$y'(L) = -\theta \Rightarrow EIy'(L) = -V_A \frac{L^2}{2} + M_A L = -EI\,\theta \quad \Rightarrow -V_A \frac{L^2}{2} + (V_A \frac{L}{3})L = -EI\,\theta$$

$$\therefore V_A = \frac{6\,EI\,\theta}{L^2} \quad \Rightarrow \quad M_A = (\frac{6\,EI\,\theta}{L^2})\frac{L}{3} \quad \therefore M_A = \frac{2\,EI\,\theta}{L}$$

As demais reações podem ser calculadas utilizando as equações de equilíbrio estático:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V_B = 0 \quad \therefore \quad V_B = \frac{6\,EI\,\theta}{L^2}$$

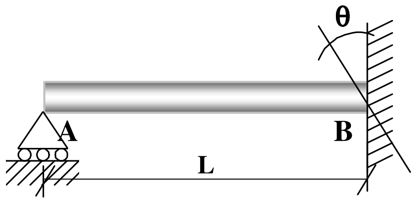
$$\sum M_z = 0 \Rightarrow V_A L - M_A - M_B = 0 \Rightarrow (\frac{6\,EI\,\theta}{L^2})L - (\frac{2\,EI\,\theta}{L}) - M_B = 0 \quad \therefore \quad M_B = \frac{4\,EI\,\theta}{L}$$

Portanto a equações da linha elástica y(x) e de rotação y'(x) ficam assim:

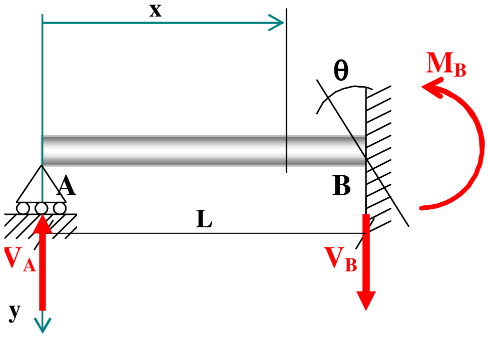
$$EIy(x) = -(\frac{6\,EI\,\theta}{L^2})\frac{x^3}{6} + (\frac{2\,EI\,\theta}{L})\frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad EIy(x) = -\frac{EI\,\theta}{L^2}x^3 + \frac{EI\,\theta}{L}x^2 \qquad 0 \le x \le L$$

$$EIy'(x) = -(\frac{6\,EI\,\theta}{L^2})\frac{x^2}{2} + (\frac{2\,EI\,\theta}{L})x \quad \Rightarrow \quad EIy'(x) = -\frac{3\,EI\,\theta}{L^2}x^2 + \frac{2\,EI\,\theta}{L}x \qquad 0 \le x \le L$$

Encontre a equação da linha elástica e as reações de apoio para a viga apoiada e engastada com rotação θ no sentido anti-horário em B como vista na figura ao lado.



Solução:



Equação dos momentos fletores:

$$M(x) = V_A x \quad \Rightarrow 0 \le x \le L$$

Equação diferencial da linha elástica:

$$EIy''(x) = -V_A x \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Integrando uma vez:

$$EIy'(x) = -V_A \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Integrando Mais uma vez:

$$EIy(x) = -V_A \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le L$$

Condições de contorno:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow EIy(L) = -V_A \frac{L^3}{6} + C_1 L = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = V_A \frac{L^2}{6}$$

$$y'(L) = -\theta \Rightarrow EIy'(L) = -V_A \frac{L^2}{2} + C_1 = -EI\,\theta \quad \Rightarrow -V_A \frac{L^2}{2} + V_A \frac{L^2}{6} = -EI\,\theta$$

$$\therefore V_A = \frac{3\,EI\,\theta}{L^2}$$

As demais reações podem ser calculadas utilizando as equações de equilíbrio estático:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V_B = 0 \quad \therefore \quad V_B = \frac{3\,EI\,\theta}{L^2}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow V_A L - M_B = 0 \Rightarrow \left(\frac{3\,EI\,\theta}{L^2}\right)L - M_B = 0 \quad \therefore \quad M_B = \frac{3\,EI\,\theta}{L}$$

Portanto a equações da linha elástica y(x) e de rotação y'(x) ficam assim:

$$EIy(x) = -\left(\frac{3\,EI\,\theta}{L^2}\right)\frac{x^3}{6} + \left(\frac{3\,EI\,\theta}{L^2}\frac{L^2}{6}\right)x \quad \Rightarrow \quad EIy(x) = -\frac{EI\,\theta}{2L^2}x^3 + \frac{EI\,\theta}{2}x \qquad 0 \le x \le L$$

$$EIy'(x) = -\left(\frac{3\,EI\,\theta}{L^2}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{3\,EI\,\theta}{L^2}\frac{L^2}{6} \quad \Rightarrow \quad EIy'(x) = -\frac{3\,EI\,\theta}{2L^2}x^2 + \frac{EI\,\theta}{2} \qquad 0 \le x \le L$$