

1. Um ensaio de tração foi executado em um corpo-de-prova com um diâmetro original de 40 mm e um comprimento nominal de 200 mm. Os resultados do ensaio até a ruptura estão listados na tabela abaixo. Faça o gráfico do diagrama tensão-deformação e determine aproximadamente o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento e o módulo de tenacidade.

Força (kN)	δ (mm)	ϵ	σ
0	0	0	0
360	0,4	0,0020	286,4789
360	0,8	0,0040	286,4789
360	1,4	0,0070	286,4789
520	2,7	0,0135	413,8029
710	18	0,0900	565,0000
600	27	0,1350	477,4648

Solução:

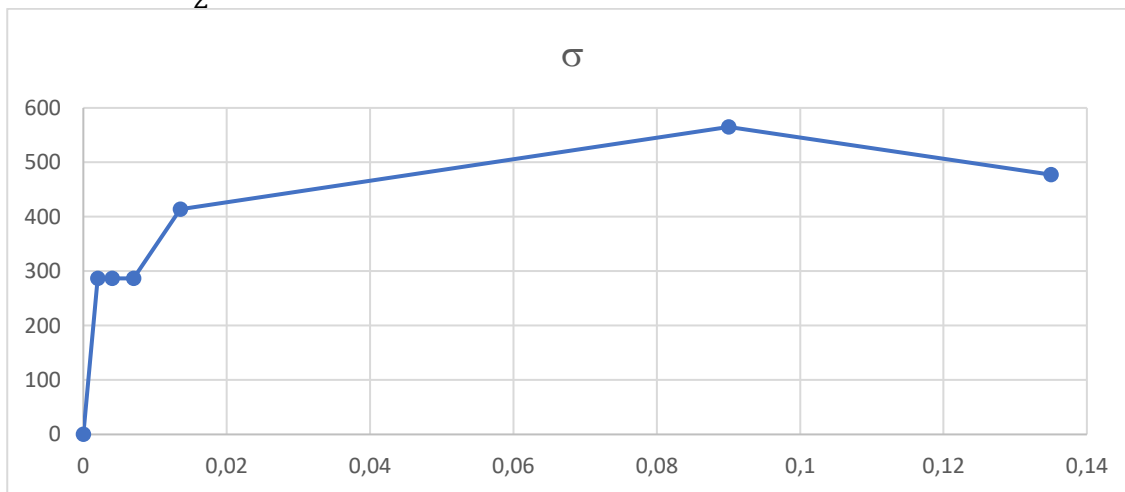
$$A = \frac{\pi \times d^2}{4} = \frac{\pi \times [40 \text{ mm}]^2}{4} = 1256,6 \text{ mm}^2$$

→Módulo de Elasticidade:

$$E = \frac{286,4789}{0,002} = 143239 \text{ MPa}$$

→Módulo de Resiliência:

$$u_r = \frac{286,4789 \times 0,002}{2} = 0,286479 \text{ MPa}$$



Respostas:

$$E = 143 \text{ GPa}$$

$$u_r = 286 \text{ kPa}$$

$$u_t = 64,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{esc} = 286 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ult} = 565 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{rup} = 477 \text{ MPa}$$

2. Um ensaio de tração foi executado em um corpo-de-prova com um diâmetro original de 40 mm e um comprimento nominal de 200 mm. Os resultados do ensaio até a ruptura estão listados na tabela abaixo. Faça o gráfico do diagrama tensão-deformação e determine aproximadamente o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento e o módulo de tenacidade.

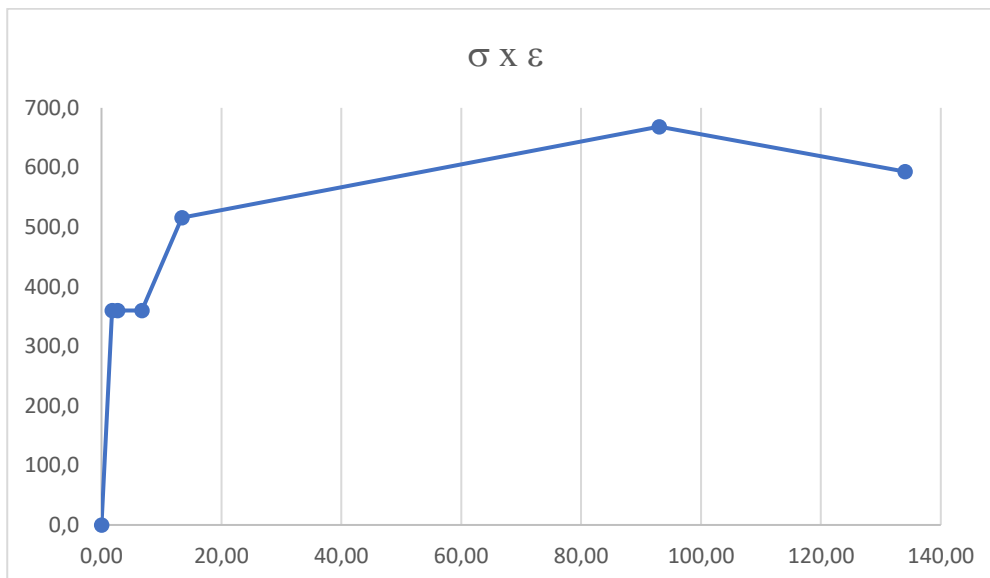
Carga (kN)	δ (mm)	ϵ	σ
0	0	0,00	0,0
452	0,35	1,75	359,7
452	0,53	2,65	359,7
452	1,35	6,75	359,7
648	2,68	13,40	515,7
840	18,6	93,00	668,5
745	26,8	134,00	592,9

Solução:

$$A = \frac{\pi \times d^2}{4} = \frac{\pi \times [40 \text{ mm}]^2}{4} = 1256,6 \text{ mm}^2$$

$$E = \frac{745,6}{0,00212} = 205537,2 \text{ MPa}$$

$$u_r = \frac{745,6 \times 0,00212}{2} = 0,314729 \text{ MPa}$$



Resposta:

$$E = 206 \text{ GPa}$$

$$u_r = 791 \text{ kPa}$$

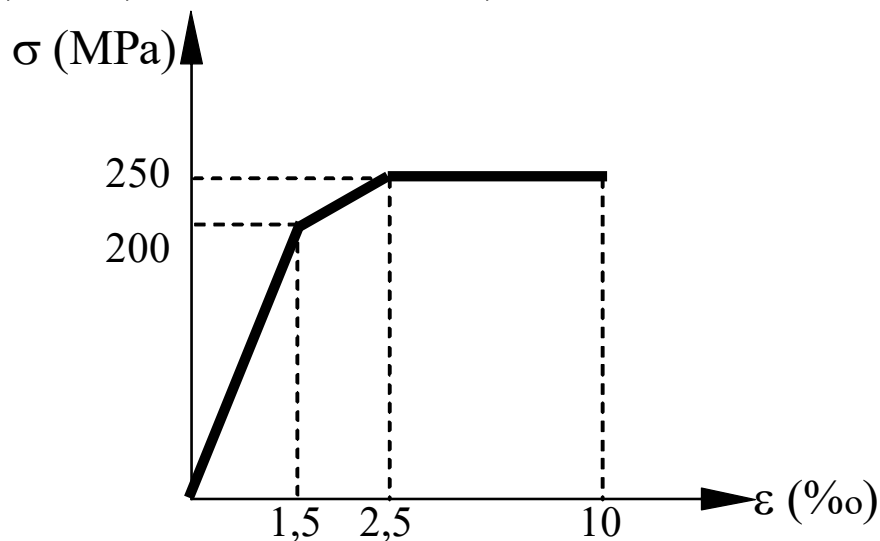
$$u_t = 78,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{esc} = 359 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ult} = 668 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{rup} = 592 \text{ MPa}$$

3. Calcule o alongamento de um tubo de comprimento de 5,0 m, quando sujeito a uma tensão de tração de 225 MPa. O material desse tubo é visto no diagrama tensão versus deformação simplificado abaixo. Calcule, também, os módulos de elasticidade, resiliência e tenacidade desse material.

**Solução:**

Módulo de Elasticidade

$$E = \operatorname{tg} \alpha = \frac{200}{0,0015} = 133333 \text{ MPa} = 133,3 \text{ GPa}$$

Módulo de Resiliência

$$u_r = \frac{0,0015 \times 200}{2} = 0,15 \text{ MPa}$$

Módulo de Tenacidade

$$u_t = \frac{0,0015 \times 200}{2} + \frac{(0,0025 - 0,0015)}{2} \times (200 + 250) + (0,010 - 0,0025) \times 250 = 2,25 \text{ MPa}$$

Na tensão de 225 MPa, o diagrama nos mostra que:

$$\varepsilon = \frac{(0,0025 + 0,0015)}{2} = 0,0020 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \varepsilon \times L = 0,0020 \times 5000 \text{ mm}$$

$$\therefore \delta = 10 \text{ mm}$$

Resposta: O alongamento do tubo de 5 m é de 10,0 mm. Os Módulos de Elasticidade, Resiliência e Tenacidade são: 133 GPa, 0,150 MPa e 2,25 MPa, respectivamente.

4. Um ensaio de tração foi executado em um corpo-de-prova com um diâmetro original de 40 mm e um comprimento nominal de 160 mm. Os resultados do ensaio até a ruptura estão listados na tabela abaixo. Faça o gráfico do diagrama tensão-deformação e determine aproximadamente o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento, a tensão última, a tensão de ruptura, o módulo de resiliência e tenacidade.

Carga (kN)	δ (mm)
0	0
568	0,44
568	1,00
568	1,67
796	3,31
999	23,1
934	33,0

Solução:

ϵ	σ (MPa)
0,00000	0,0
0,00275	452,0
0,00625	452,0
0,01044	452,0
0,02069	633,4
0,14438	795,0
0,20625	743,3

$$E = \frac{452,0}{0,00275} = 164363,65 \text{ MPa}$$

$$u_r = \frac{452,0 \times 0,00275}{2} = 0,6215 \text{ MPa}$$

$$E = 164 \text{ GPa}$$

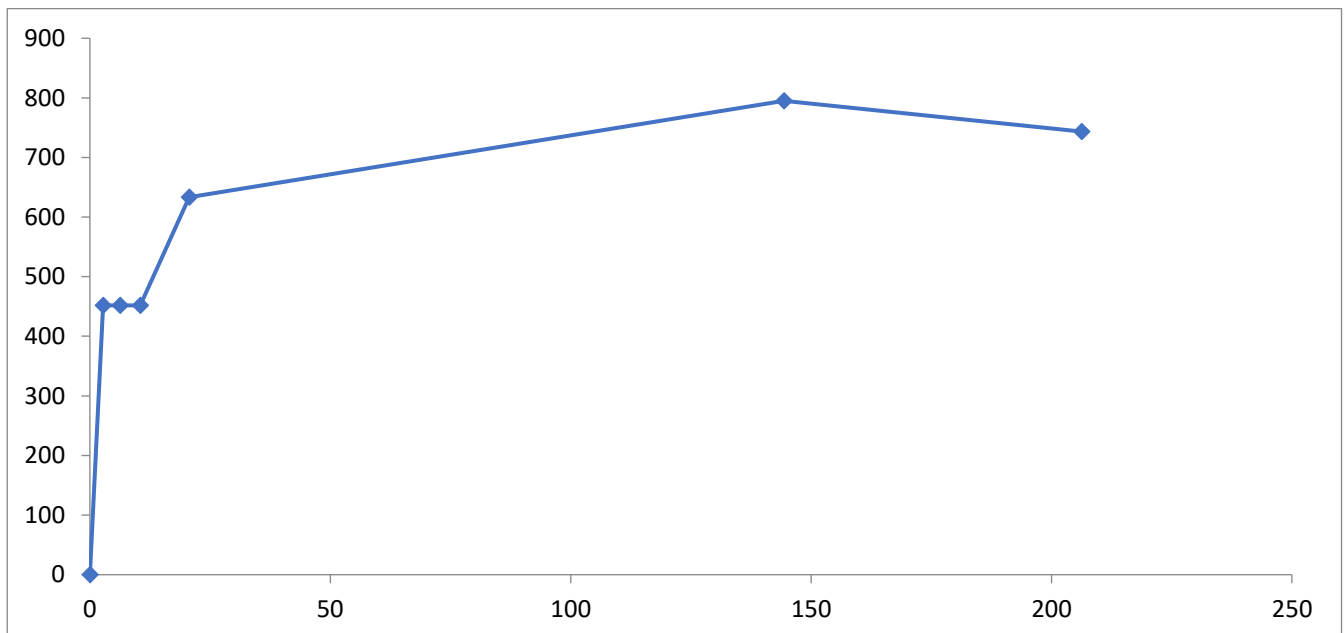
$$u_r = 0,622 \text{ MPa}$$

$$u_t = 146 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ult} = 795 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{rup} = 743 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{esc} = 452 \text{ MPa}$$



Resposta:

Módulo de Elasticidade = 164 GPa

Módulo de Resiliência = 622 kPa

Módulo de Tenacidade = 146 MPa

Tensão de Escoamento = 452 MPa

Tensão Última (Resistência) = 795 MPa

Tensão de Ruptura = 742 MPa

5. Um ensaio de tração foi executado em um corpo-de-prova com um diâmetro original de 32 mm e um comprimento nominal de 120 mm. Os resultados do ensaio até a ruptura estão listados na tabela ao lado. Faça o gráfico do diagrama tensão-deformação e determine aproximadamente o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento, a tensão última, a tensão de ruptura, o módulo de resiliência e tenacidade. $u_t = 130 \text{ MPa}$

Carga (kN)	δ (mm)
0	0
366	0,28
366	0,42
366	1,08
523,9	2,14
666,8	14,9
605,2	21,4

Solução:

A coluna da carga (1 kN = 1000 N) deve ser dividida pela área da seção transversal do corpo-de-prova:

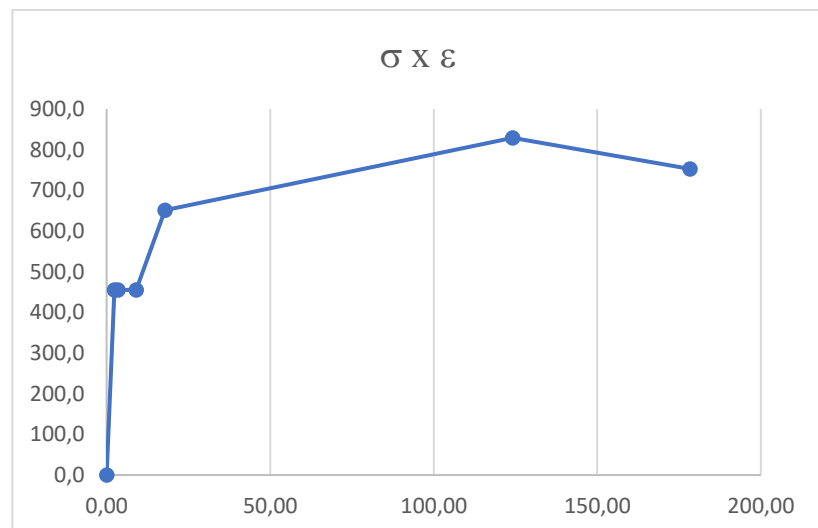
$$A = \frac{\pi \times (32 \text{ mm})^2}{4} = 804,2477 \text{ mm}^2$$

A coluna do alongamento δ deve ser dividida pelo comprimento nominal do corpo-de-prova:

$$L_i = 120 \text{ mm}$$

Assim temos uma nova tabela:

ϵ (mm/mm)	σ (MPa)
0,0	0,0
2,3	455,1
3,5	455,1
9,0	455,1
17,8	651,4
124,2	829,1
178,3	752,5



Módulo de Elasticidade E:

$$E = \frac{455,08367 \text{ MPa}}{0,0023333} = 195036 \text{ MPa} = 195 \text{ GPa}$$

Módulo de Resiliência u_r :

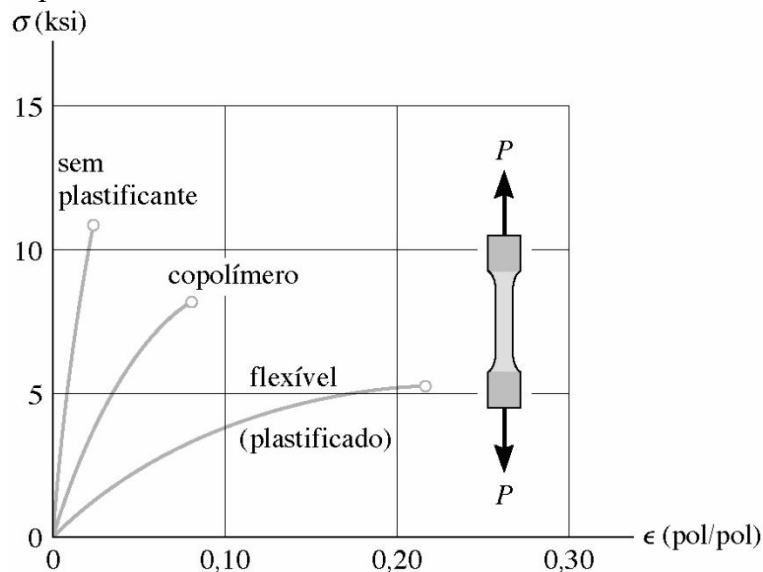
$$u_r = \frac{0,0023333 \times 455,08367 \text{ MPa}}{2} = 0,531 \text{ MPa} = 531 \text{ kPa}$$

Utilizando-se a regra dos trapézios (soma de trapézios sob a curva tensão x deformação) temos o Módulo de Tenacidade: $u_t = 130 \text{ MPa}$

Resposta:

Módulo de Elasticidade = 195 GPa	Tensão de Escoamento = 455 MPa
Módulo de Resiliência = 531 kPa	Tensão Última (Resistência) = 829 MPa
Módulo de Tenacidade = 130 MPa	Tensão de Ruptura = 752 MPa

6. Adicionando plastificantes ao cloreto de polivinil, é possível reduzir sua rigidez. Os diagramas tensão-deformação para três tipos desse material, indicando tal efeito, são mostrados a seguir. Especificar o tipo que deve ser usado na fabricação de uma haste com 5 pol de comprimento e 2 pol de diâmetro, exigida para suportar uma carga axial de pelo menos 20 kip e que também deve ser esticada no máximo $\frac{1}{4}$ pol.

**Solução:**

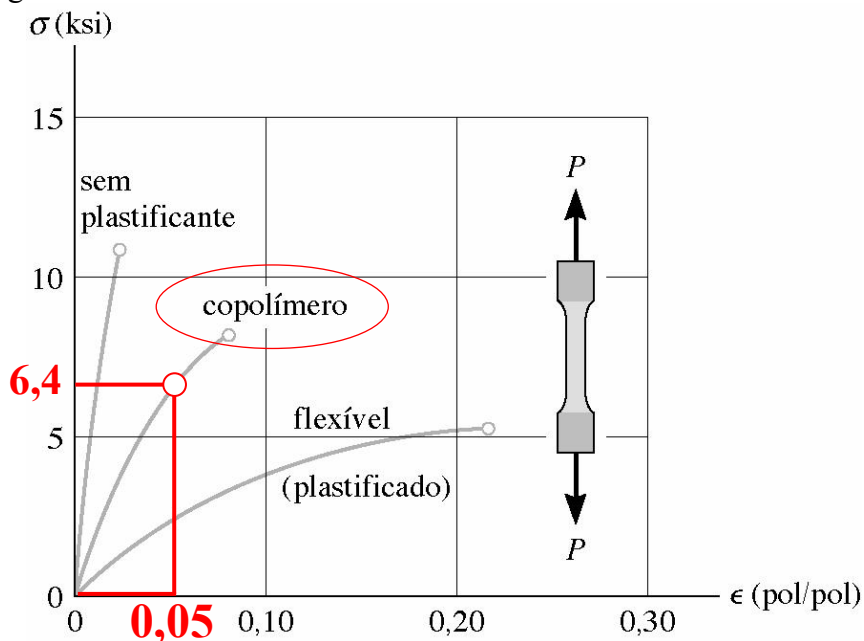
Tensão normal aplicada:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kip}}{\pi \times (2 \text{ pol})^2} = \frac{20000 \text{ lbf}}{\pi \times (2 \text{ pol})^2} = 6366 \frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2} = 6366 \text{ psi} = 6,4 \text{ ksi}$$

Deformação específica máxima correspondente:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1/4 \text{ pol}}{5 \text{ pol}} = 0,05 \frac{\text{pol}}{\text{pol}}$$

Utilizando o diagrama temos:



Resposta: Claramente se vê no diagrama que **copolímero** é o tipo que deve ser usado na fabricação da haste de acordo as exigências de tensão e deformação.

7. Um ensaio de tração foi executado em um corpo-de-prova com um diâmetro original de 36 mm e um comprimento nominal de 142 mm. Os resultados do ensaio até a ruptura estão listados na tabela ao lado. Faça o gráfico do diagrama tensão-deformação e determine aproximadamente o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento, a tensão última, a tensão de ruptura, o módulo de resiliência e tenacidade.

Carga (kN)	δ (mm)
0	0
399	0,31
399	0,52
399	1,09
483	2,21
677	14,8
580	20,2

Solução:

A coluna da carga (1 kN = 1000 N) deve ser dividida pela área da seção transversal do corpo-de-prova:

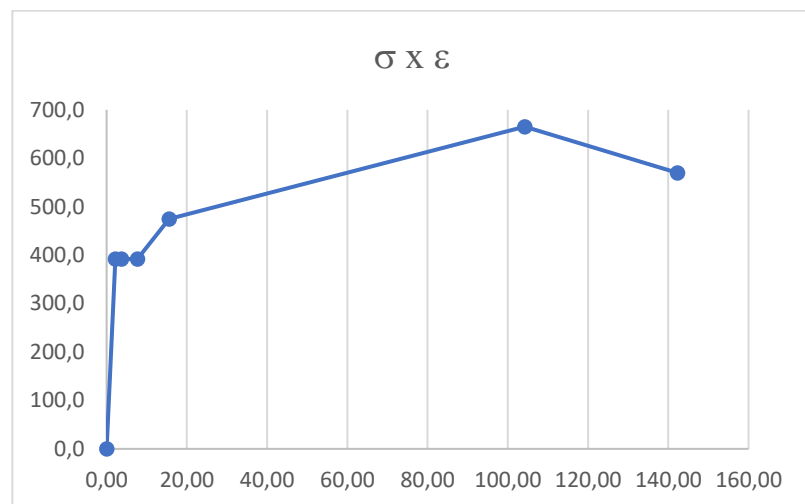
$$A = \frac{\pi \times (36 \text{ mm})^2}{4} = 1017,876 \text{ mm}^2$$

A coluna do alongamento δ deve ser dividida pelo comprimento nominal do corpo-de-prova:

$$L_i = 142 \text{ mm}$$

Assim temos uma nova tabela:

ϵ (mm/mm)	σ (MPa)
0,00	0,0
2,18	392,0
3,66	392,0
7,68	392,0
15,56	474,5
104,23	665,1
142,25	569,8



Módulo de Elasticidade E:

$$E = \frac{391,99273 \text{ MPa}}{0,0021831} = 179558 \text{ MPa} = 180 \text{ GPa}$$

Módulo de Resiliência u_r :

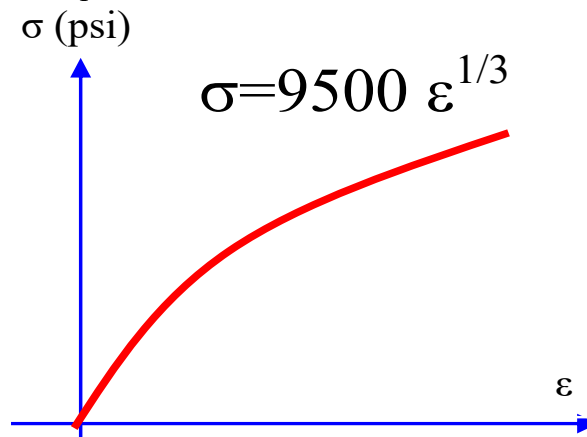
$$u_r = \frac{0,0021831 \times 391,99273 \text{ MPa}}{2} = 0,428 \text{ MPa} = 428 \text{ kPa}$$

Utilizando-se a regra dos trapézios (soma de trapézios sob a curva tensão x deformação) temos o Módulo de Tenacidade: $u_t = 80 \text{ MPa}$

Resposta:

Módulo de Elasticidade = 180 GPa	Tensão de Escoamento = 392 MPa
Módulo de Resiliência = 428 kPa	Tensão Última (Resistência) = 665 MPa
Módulo de Tenacidade = 80 MPa	Tensão de Ruptura = 570 MPa

8. O diagrama tensão x deformação mostrado na figura refere-se a um plástico. Determine o alongamento de uma barra com 3 pés de comprimento e área de seção transversal de $0,875 \text{ pol}^2$ se ela é fabricada com este material e submetida a uma carga axial de 2,5 kip. Calcule o Módulo de Tenacidade se o plástico vai a ruptura sob a tensão de 3 ksi.



Solução:

$$\sigma = 9500 \epsilon^{1/3} \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{\sigma}{9500} \right)^3 \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{\sigma}{9500} \right)^3$$

Mas,

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2500 \text{ lbf}}{0,875 \text{ in}^2} = 2857,143 \text{ psi}$$

Então:

$$\epsilon = \left(\frac{2857,143}{9500} \right)^3 = 0,027204$$

Como:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \epsilon \times L$$

Onde $L = 3 \text{ pés} = 36 \text{ pol}$

Assim,

$$\delta = 0,027204 \times 36$$

$$\therefore \delta = 0,979 \text{ pol}$$

Módulo de Tenacidade

$$\epsilon_{rup} = \left(\frac{3000}{9500} \right)^3 = 0,0314915$$

$$u_t = \int_0^{\epsilon_{rup}} 9500 \epsilon^{1/3} d\epsilon = 9500 \frac{\epsilon^{4/3}}{4/3} \Big|_0^{\epsilon_{rup}} = 9500 \frac{\epsilon_{rup}^{4/3}}{4/3} = 9500 \frac{(0,0314915)^{4/3}}{4/3} = 70,9 \text{ psi}$$

Resposta: O alongamento da barra com 3 pés (36 pol) de comprimento será de **0,979 pol** e o módulo de tenacidade = **70,9 psi**.

9. Um ensaio de tração foi realizado em um corpo de prova de aço com diâmetro original de 12,5 mm e comprimento de referência de 50 mm. Os dados são apresentados na tabela. Trace o diagrama tensão-deformação e determine aproximadamente o módulo de elasticidade e as tensões de escoamento, máxima e de ruptura.

Carga (kN)	Alongamento (mm)
0,0	0,0000
7,0	0,0125
21,0	0,0375
36,0	0,0625
50,0	0,0875
53,0	0,1250
53,0	0,2000
54,0	0,5000
75,0	1,0000
90,0	2,5000
97,0	7,0000
87,8	10,0000
83,3	11,5000

Solução:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(12,5 \text{ mm})^2}{4} = 122,7 \text{ mm}^2$$

→Cálculo das tensões normais – para cada carga da tabela:

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{A} = \frac{0 \text{ N}}{122,7 \text{ mm}^2} = 0,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A} = \frac{7000 \text{ N}}{122,7 \text{ mm}^2} = 57,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A} = \frac{21000 \text{ N}}{122,7 \text{ mm}^2} = 171 \text{ MPa}$$

... e assim por diante até a última carga:

$$\sigma_{12} = \frac{P_{12}}{A} = \frac{83300 \text{ N}}{122,7 \text{ mm}^2} = 679 \text{ MPa}$$

→Cálculo das deformações específicas – para cada alongamento da tabela:

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta_0}{L} = \frac{0 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0,00000$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L} = \frac{0,0125 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0,00025$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L} = \frac{0,0375 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0,00075$$

... e assim por diante até o último alongamento:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\delta_{12}}{L} = \frac{11,5 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0,23000$$

→Tabela de pontos Tensão x Deformação:

ε (mm/mm)	σ (MPa)
0,00000	0
0,00025	57
0,00075	171
0,00125	293
0,00175	407
0,00250	432
0,00400	432
0,01000	440
0,02000	611
0,05000	733
0,14000	790
0,20000	715
0,23000	679

→Módulo de elasticidade aproximado:

$$E = \tan(\alpha) = \frac{\sigma_{lp}}{\varepsilon_{lp}} \cong \frac{407 \text{ MPa}}{0,00175} = 232571 \text{ MPa}$$

$\therefore E \cong 233 \text{ GPa}$

→Tensão de escoamento aproximada:

$$\therefore \sigma_{esc} \cong 432 \text{ MPa}$$

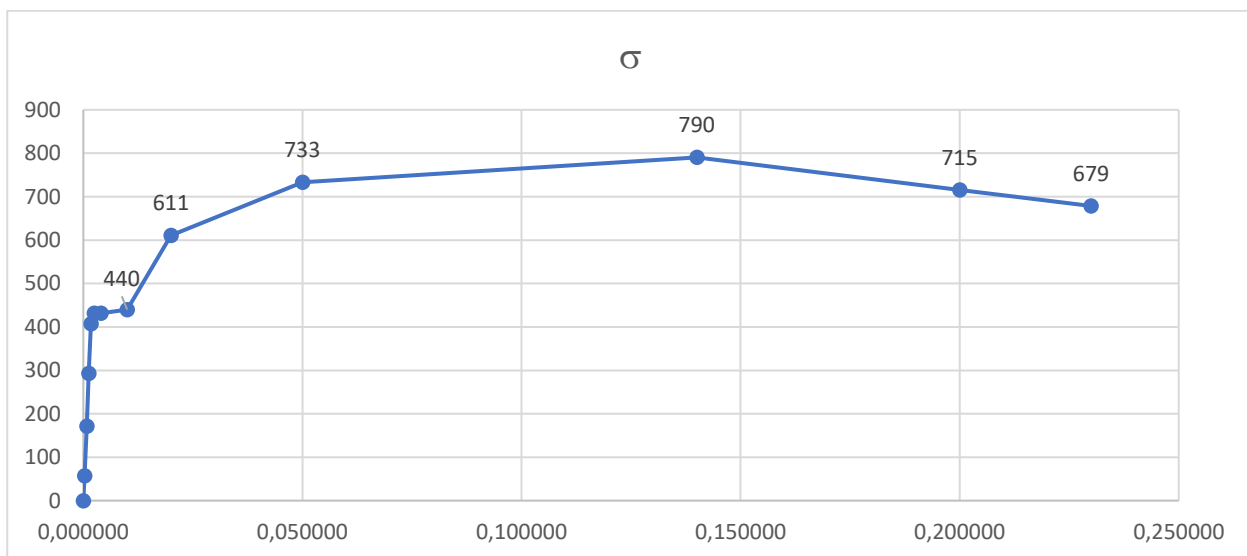
→Tensão máxima aproximada:

$$\therefore \sigma_{max} \cong 790 \text{ MPa}$$

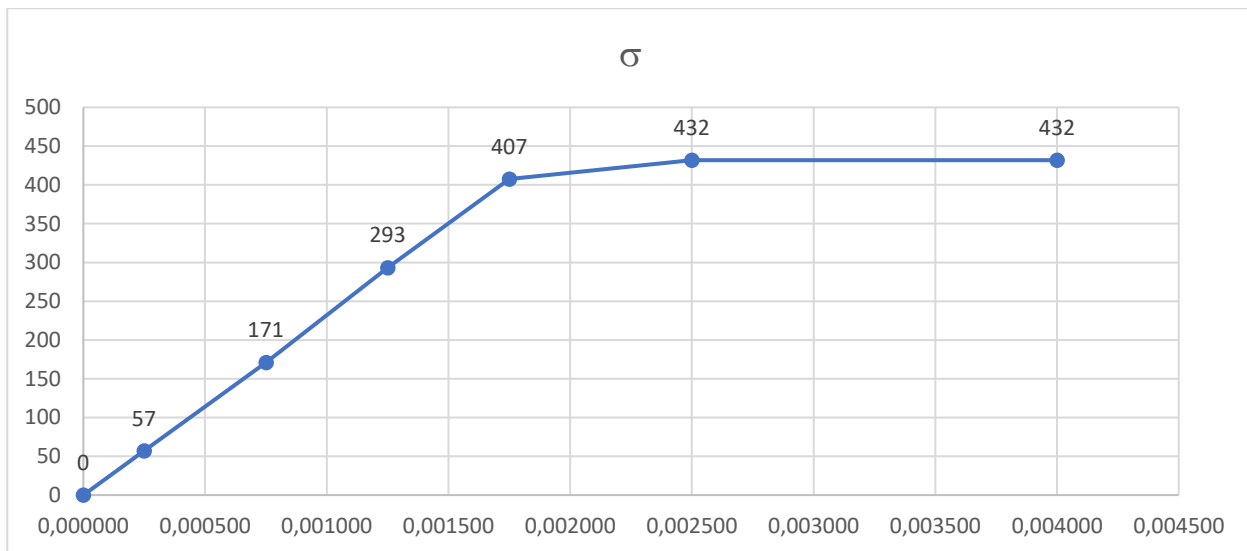
→Tensão de ruptura aproximada:

$$\therefore \sigma_{rup} \cong 679 \text{ MPa}$$

→Gráfico Tensão x Deformação com todos os pontos da tabela:



→Gráfico Tensão x Deformação com os pontos iniciais da tabela:

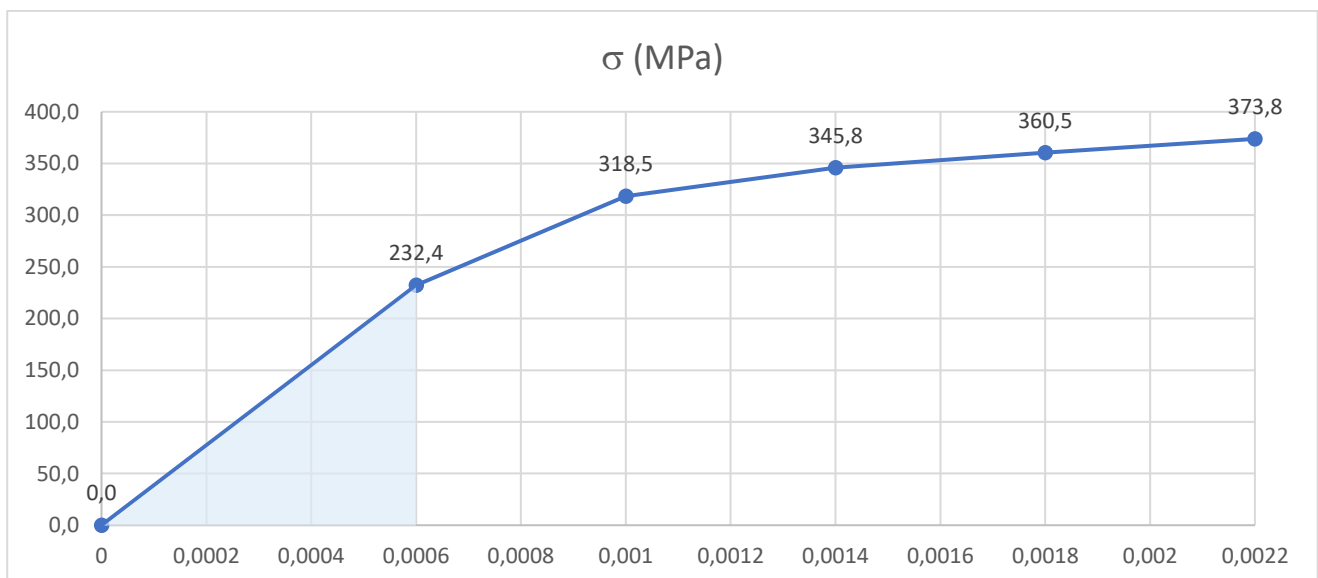


10. Os dados retirados de um ensaio de tensão-deformação para uma cerâmica são dados na tabela. A curva é linear entre a origem e o primeiro ponto. Trace o diagrama e determine os **módulos de elasticidade** e de **resiliência**.

σ (MPa)	ϵ (mm/mm)
0,0	0,0000
232,4	0,0006
318,5	0,0010
345,8	0,0014
360,5	0,0018
373,8	0,0022

Solução:

→ Gráfico Tensão x Deformação com todos os pontos da tabela:



→ Módulo de elasticidade aproximado:

$$E = \tan(\alpha) = \frac{\sigma_{lp}}{\epsilon_{lp}} \cong \frac{232,4 \text{ MPa}}{0,0006} = 387333 \text{ MPa}$$

∴ **E ≅ 387 GPa**

→Módulo de resiliência (área do triângulo destacado no gráfico):

$$u_r = \frac{\varepsilon_{lp} \times \sigma_{lp}}{2} \cong \frac{0,0006 \times 232,4 \text{ MPa}}{2} = 0,06972 \text{ MPa} = 0,06972 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$u_r = 0,06972 \times 10^3 \frac{10^3 \text{ N}}{\text{m}^2} = 69,72 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = 69,72 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{m}^3}$$

$$\therefore u_r = 69,7 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$$

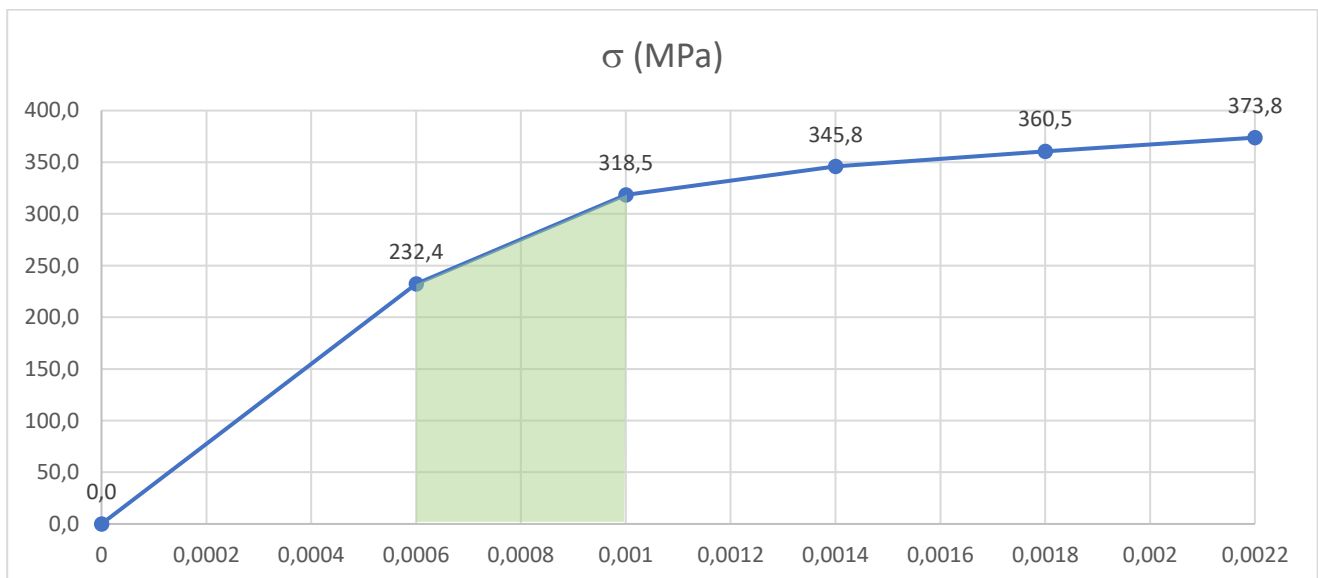
Obs.: 1 J = 1 Joule = 1 N.m

11. Os dados retirados de um ensaio de tensão-deformação para uma cerâmica são dados na tabela. A curva é linear entre a origem e o primeiro ponto. Trace o diagrama e determine, por aproximação, o módulo de tenacidade. A tensão de ruptura é $\sigma_{rup} = 373,8 \text{ MPa}$.

σ (MPa)	ε (mm/mm)
0,0	0,0000
232,4	0,0006
318,5	0,0010
345,8	0,0014
360,5	0,0018
373,8	0,0022

Solução:

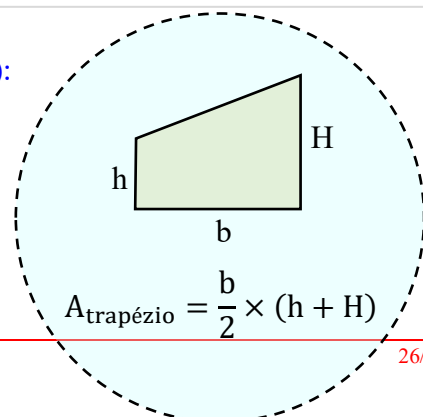
→Gráfico Tensão x Deformação com todos os pontos da tabela:



→Módulo de tenacidade (todos trapézios têm 0,0004 de base):

$$u_t \cong \frac{0,0006 \times 232,4}{2} +$$

$$+ \frac{0,0004}{2} \times (232,4 + 318,5) +$$



$$\begin{aligned}
 &+ \frac{0,0004}{2} \times (318,5 + 345,8) + \\
 &+ \frac{0,0004}{2} \times (345,8 + 360,5) + \\
 &+ \frac{0,0004}{2} \times (360,5 + 373,8) = 0,60088 \text{ MPa} = 600,88 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = 600,88 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{m}^3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore u_t \cong 601 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$$

Obs.: 1 J = 1 Joule = 1 N.m

12. Um ensaio de tração foi executado em um corpo-de-prova com um diâmetro original de 39 mm e um comprimento nominal de 216 mm. Os resultados do ensaio até a ruptura estão listados na tabela abaixo. Faça o gráfico do diagrama tensão-deformação e determine aproximadamente o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento e o módulo de tenacidade.

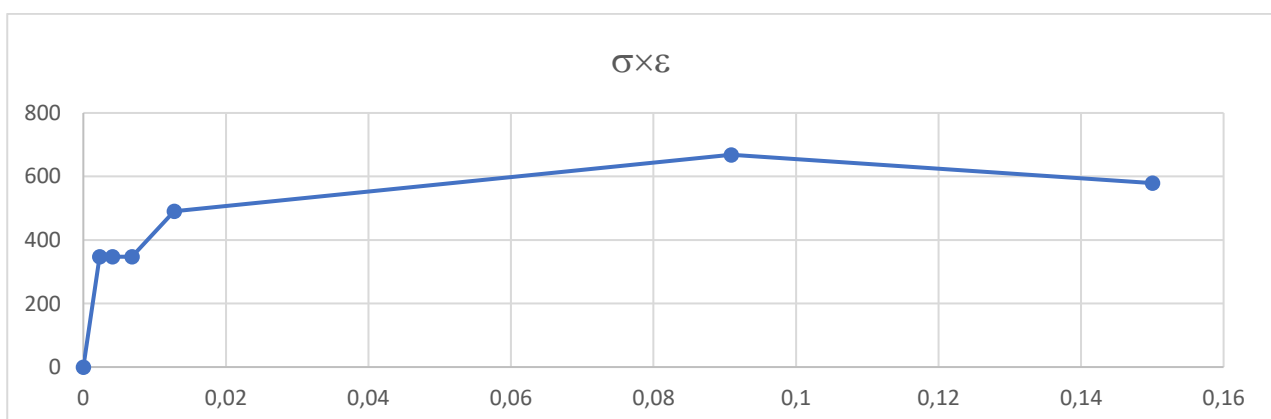
Carga (kN)	δ (mm)	ϵ (por mil)	σ (MPa)
0	0	0,00	0,0
383	0,5	2,31	320,6
383	0,9	4,17	320,6
383	1,5	6,94	320,6
538	2,8	13,0	450,4
732	20	92,6	612,8
635	33	153	531,6

Solução:

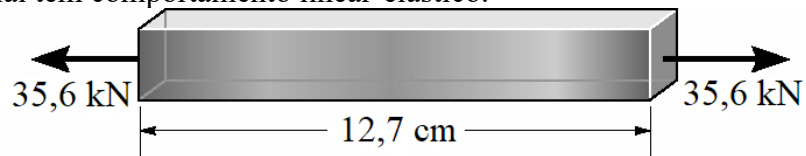
$$A = \frac{\pi \times d^2}{4} = \frac{\pi \times [39 \text{ mm}]^2}{4} = 1194,6 \text{ mm}^2$$

$$E = \frac{320,6}{2,31} = 138,5 \text{ GPa}$$

$$u_t = 80,94 \text{ MPa}$$



13. Uma barra com comprimento de 12,7 cm e área da seção transversal de 0,452 cm² está submetida a uma força axial de 35,6 kN. Se a barra estica 0,508 mm, determinar o módulo de elasticidade do material. O material tem comportamento linear-elástico.

**Solução:**

Tensão normal média:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{35,6 \text{ kN}}{0,452 \text{ cm}^2} = 78,761 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Deformação específica média:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0,508 \text{ mm}}{12,7 \text{ cm}} = \frac{0,508 \text{ mm}}{127 \text{ mm}} = 0,004$$

Assim, o módulo de elasticidade é:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{78,761 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{0,004} = 19690 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 197 \text{ GPa}$$

Resposta: O módulo de elasticidade do material é 197 GPa.