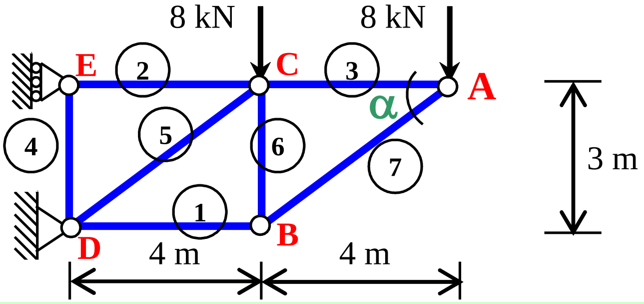
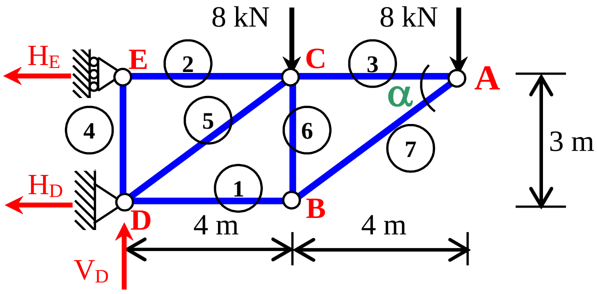
Esforços normais em treliça isostática – Exemplo 1

Calcule os esforços em todas as barras da treliça isostática abaixo. Considere todos os nós como rótulas perfeitas.

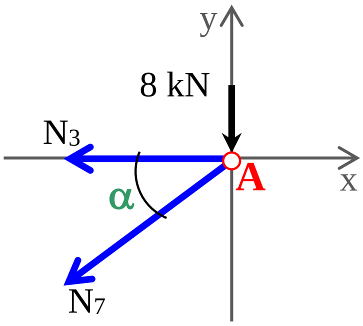


Solução:



$$\text{sen}(\alpha) = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos(\alpha) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

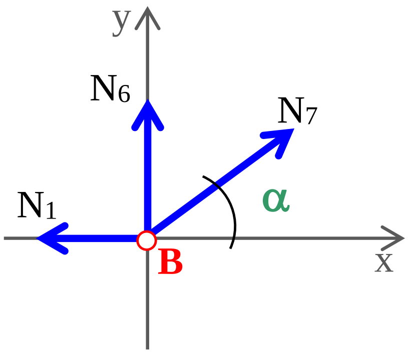


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -8 - N_7\text{sen}(\alpha) = 0$$

$$\therefore N_7 = -13{,}333\ \text{kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 + N_7\cos(\alpha) = 0$$

$$\therefore N_3 = +10{,}667\ \text{kN}$$

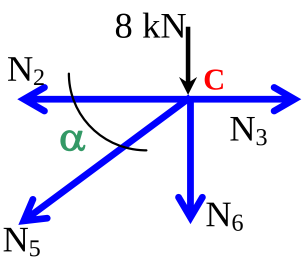


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_1 + N_7\cos(\alpha) = 0$$

$$\therefore N_1 = -10{,}667\ \text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_6 + N_7\ \text{sen}(\alpha) = 0$$

$$\therefore N_6 = +8\ \text{kN}$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_5\text{sen}(\alpha) - 8 - N_6 = 0$$

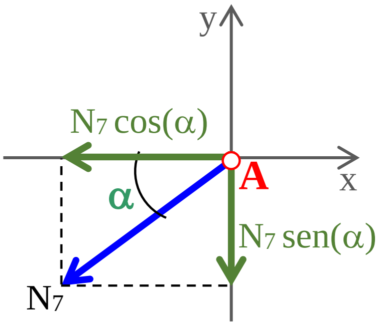
$$\therefore N_5 = -26{,}667\ \text{kN}$$

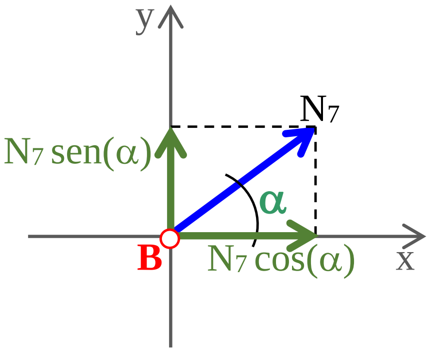
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_2 - N_5\cos(\alpha) + N_3 = 0$$

$$\therefore N_2 = +32\ \text{kN}$$

Resumindo:

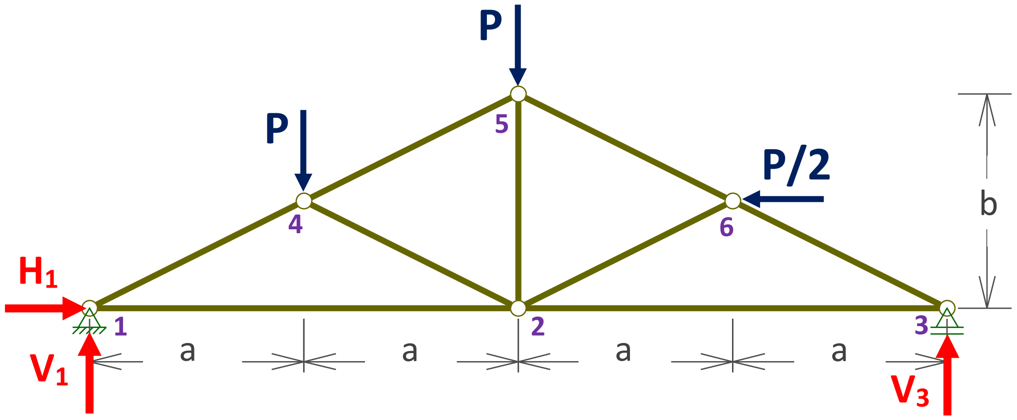
Barra	N
1	-10,667
2	+32,000
3	+10,667
4	0,000
5	-26,667
6	+8,000
7	-13,333





Esforços normais em treliça isostática – Exemplo 2

Calcule os esforços normais de todas as barras da treliça vista na figura abaixo. Considere todos os nós como rótulas perfeitas.



P = 9,5 kN
a = 1,5 m
b = 1,0 m

Solução:

→ Reações de apoio:

- Utilizando as equações de equilíbrio, primeiro equilíbrio de forças em x:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow H_1 = \frac{P}{2} = \frac{9{,}5}{2}$$

$\therefore H_1 = 4{,}75\ \mathrm{kN}$

- tomando um eixo z que passa pelo ponto **3** temos:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow V_1(4a) - P(3a) - P(2a) - \frac{P}{2}\frac{b}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{P(3a) + P(2a) + \frac{Pb}{4}}{4a} = \frac{9{,}5 \times (3 \times 1{,}5) + 9{,}5 \times (2 \times 1{,}5) + \frac{9{,}5 \times 1{,}0}{4}}{4 \times 1{,}5}$$

$\therefore V_1 = 12{,}27\ \mathrm{kN}$

- e por último, equilíbrio de forças em y temos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_3 - P - P = 0$$

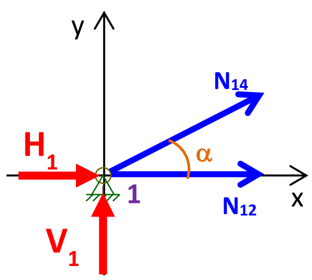
$$\Rightarrow \quad V_3 = P + P - V_1 = 9{,}5 + 9{,}5 - 12{,}27$$

$\therefore V_3 = 6{,}73\ \mathrm{kN}$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$\alpha = 18{,}43^{\circ}$$

→Cálculo dos esforços normais:

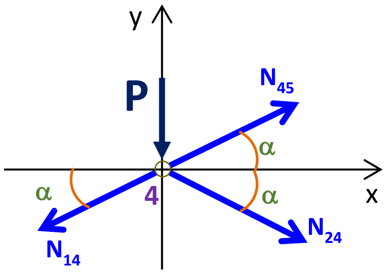


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + N_{14}\mathrm{sen}(\alpha) = 0$$

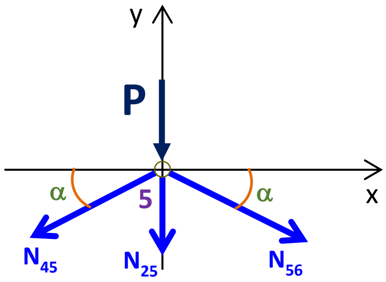
$\therefore N_{14} = -38{,}80\ \mathrm{kN}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{12} + N_{14}\cos(\alpha) + H_1 = 0$$

$\therefore N_{12} = 32{,}06\ \mathrm{kN}$

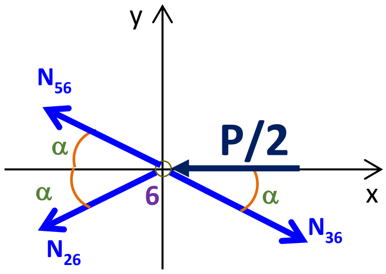


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{45}\cos(\alpha) + N_{24}\cos(\alpha) - N_{14}\cos(\alpha) = 0$$
$$\Rightarrow N_{45} = N_{14} - N_{24}$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{45}\mathrm{sen}(\alpha) - N_{24}\mathrm{sen}(\alpha) - N_{14}\mathrm{sen}(\alpha) - P = 0$$
$$\Rightarrow N_{24} = \frac{-P}{2\ \mathrm{sen}(\alpha)}$$
$$\therefore N_{24} = -15{,}02\ \mathrm{kN}$$
$$\therefore N_{45} = -23{,}78\ \mathrm{kN}$$

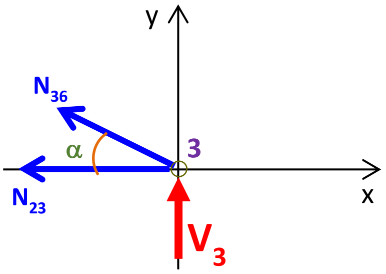


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{45}\cos(\alpha) + N_{56}\cos(\alpha) = 0$$
$$\therefore N_{56} = -23{,}78\ \mathrm{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{45}\mathrm{sen}(\alpha) - N_{56}\mathrm{sen}(\alpha) - N_{25} - P = 0$$
$$\therefore N_{25} = 5{,}54\ \mathrm{kN}$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{26}\mathrm{sen}(\alpha) - N_{36}\mathrm{sen}(\alpha) + N_{56}\mathrm{sen}(\alpha) = 0$$
$$\Rightarrow N_{26} = N_{56} - N_{36}$$
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{26}\cos(\alpha) + N_{36}\cos(\alpha) - N_{56}\cos(\alpha) - \frac{P}{2} = 0$$
$$\Rightarrow N_{36} = \frac{\frac{P}{2} + 2\ N_{56}\cos(\alpha)}{2\ \cos(\alpha)}$$
$$\therefore N_{36} = -21{,}28\ \mathrm{kN}$$
$$\therefore N_{26} = -2{,}50\ \mathrm{kN}$$

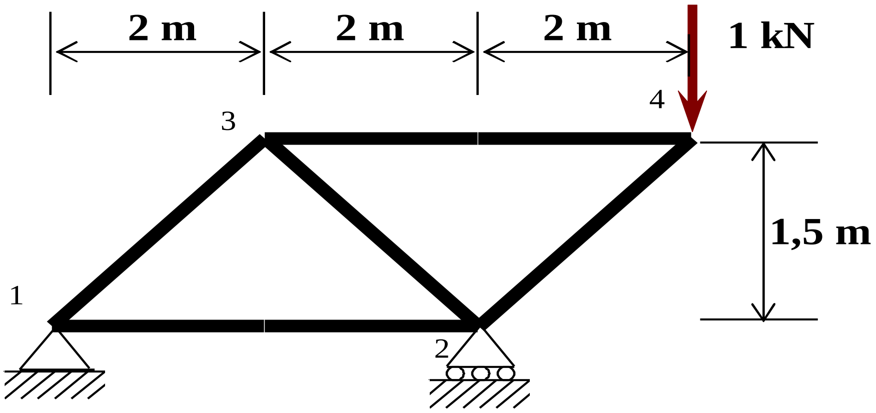


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{23} - N_{36}\cos(\alpha) = 0$$
$$\therefore N_{23} = 20{,}19\ \mathrm{kN}$$

→Resumindo:

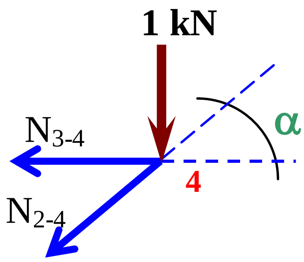
barra	N (kN)
14	-38,80
12	32,06
24	-15,02
45	-23,78
56	-23,78
25	5,54
36	-21,28
26	-2,50
23	20,19

3 – Calcule os esforços nas barras 3-4 e 2-4 da treliça isostática abaixo. Considere todos os nós como rótulas perfeitas.



Solução:

Equações de equilíbrio para o nó 4 : sen(α) = 0,6 e cos(α) = 0,8



$\sum F_y = 0 \Rightarrow$

$1 + N_{2-4}\text{sen}(\alpha) = 0$

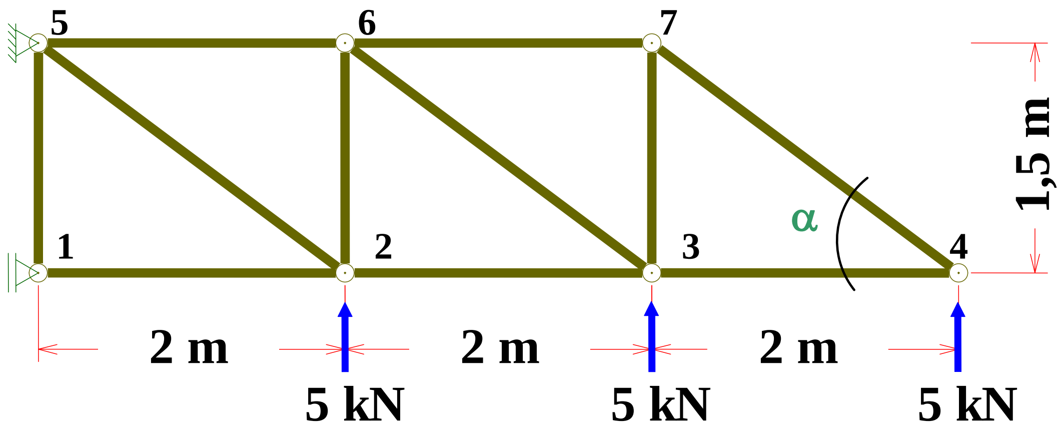
$\therefore N_{2-4} = -1{,}667 \text{ kN}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow$

$N_{3-4} + N_{2-4}\cos(\alpha) = 0$

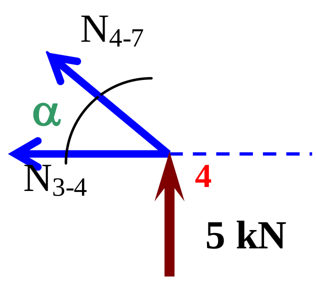
$\therefore N_{3-4} = +1{,}333 \text{ kN}$

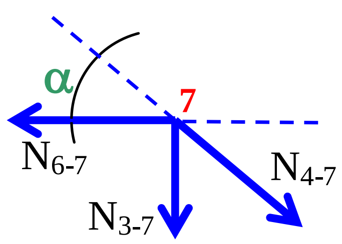
4- Calcule os esforços nas barras 2-3; 3-6 e 6-7 da treliça isostática abaixo. Considere todos os nós como rótulas perfeitas.

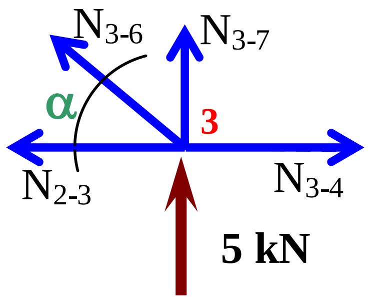


Solução:

Equações de equilíbrio para os nós 4, 7 e 3 : sen(α) = 0,6 e cos(α) = 0,8







Nó 4:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$
$5 + N_{4-7}\text{sen}(\alpha) = 0$
$\therefore N_{4-7} = -8{,}333 \text{ kN}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow$
$N_{3-4} + N_{4-7}\cos(\alpha) = 0$
$\therefore N_{3-4} = +6{,}667 \text{ kN}$

Nó 7:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$
$N_{4-7}\text{sen}(\alpha) + N_{3-7} = 0$
$\therefore N_{3-7} = +5 \text{ kN}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow$
$N_{4-7}\cos(\alpha) - N_{6-7} = 0$
$\therefore N_{6-7} = -6{,}667 \text{ kN}$

Nó 3:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$
$N_{3-6}\text{sen}(\alpha) + N_{3-7} + 5 = 0$
$\therefore N_{3-6} = -16{,}667 \text{ kN}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow$
$-N_{3-6}\cos(\alpha) - N_{2-3} + N_{3-4} = 0$
$\therefore N_{2-3} = +20 \text{ kN}$

Resumindo:

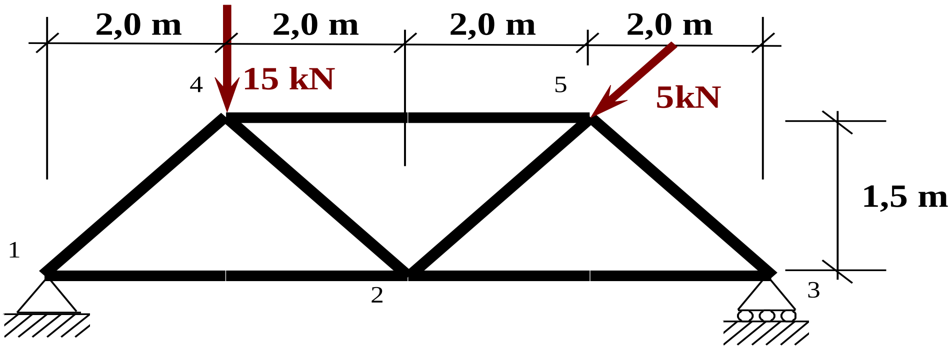
Barra	N
2-3	+20,000
3-6	-16,667
6-7	-6,667

→Note que:

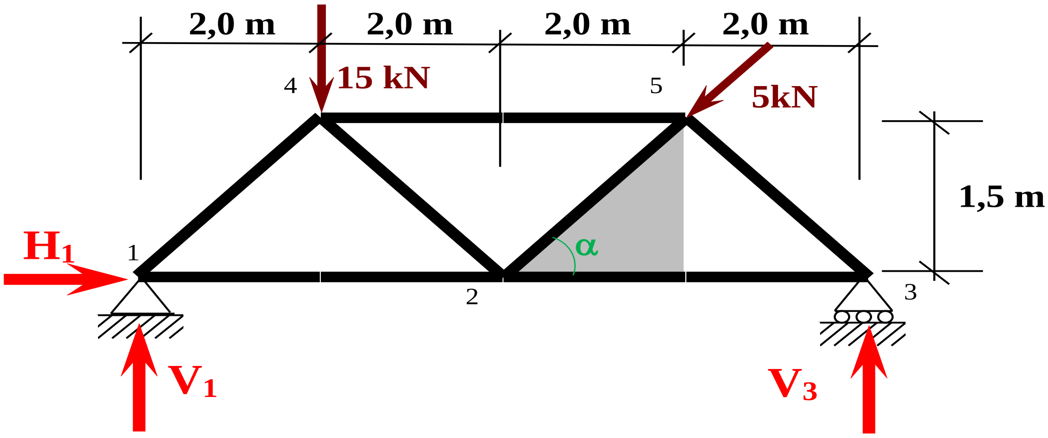
1) Foram adotados os sentidos dos esforços normais sempre saindo das barras, ou seja, foram supostos esforços normais de tração. O valor do esforço normal negativo numa barra significa que contraria o sentido adotado, portanto essa barra sofre esforço normal de compressão.

2) o nó escolhido para se aplicar as equações de equilíbrio é aquele que onde se encontra apenas duas barras com esforços desconhecidos. Assim, iniciou-se com o nó 4. Seguindo, adotou-se o nó 7. Embora o nó 7 tenha 3 barras, apenas duas delas tem esforços desconhecidos. O esforço 4-7 já foi calculado anteriormente no equilíbrio do nó 4.

5- Calcule os esforços normais das barras 4-5, 2-5 e 2-3 da treliça isostática representada pela figura abaixo (considere todos os nós como rótulas perfeitas) usando o **Método de Ritter**:

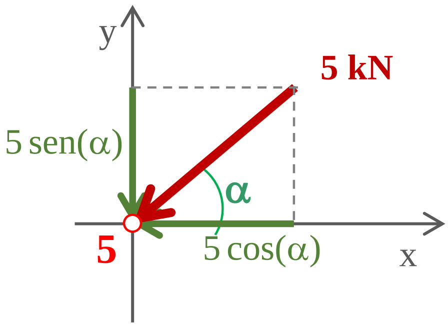


Solução:



→No triângulo retângulo em destaque:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$$
$$\cos(\alpha) = \frac{2{,}0}{2{,}5} = 0{,}8$$



→Reações de apoio:

Vamos somar os momentos em torno do eixo z que passa pelo nó 3:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow V_1 \times 8 - 15 \times 6 - 5 \times \text{sen}(\alpha) \times 2 - 5 \times \cos(\alpha) \times 1{,}5 = 0$$

$\therefore V_1 = 12{,}75\ \text{kN}$

E assim, vamos utilizar o somatório de forças verticais:

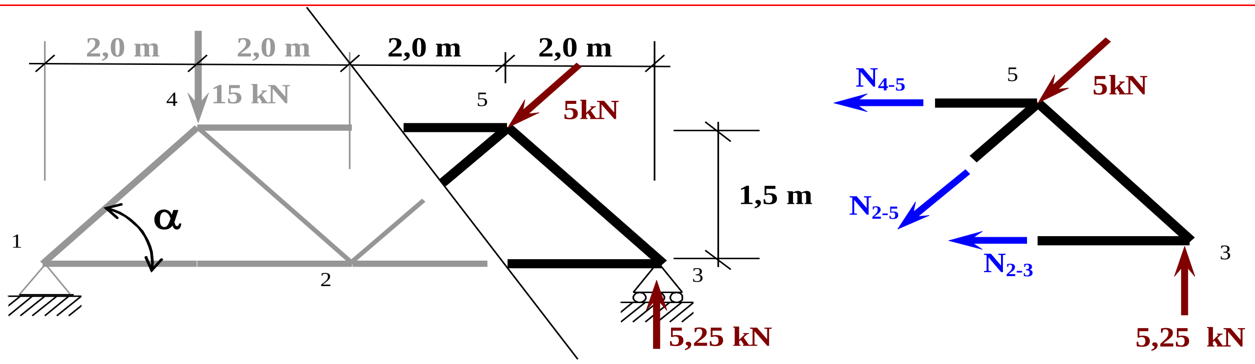
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_3 - 15 - 5 \times \text{sen}(\alpha) = 0$$

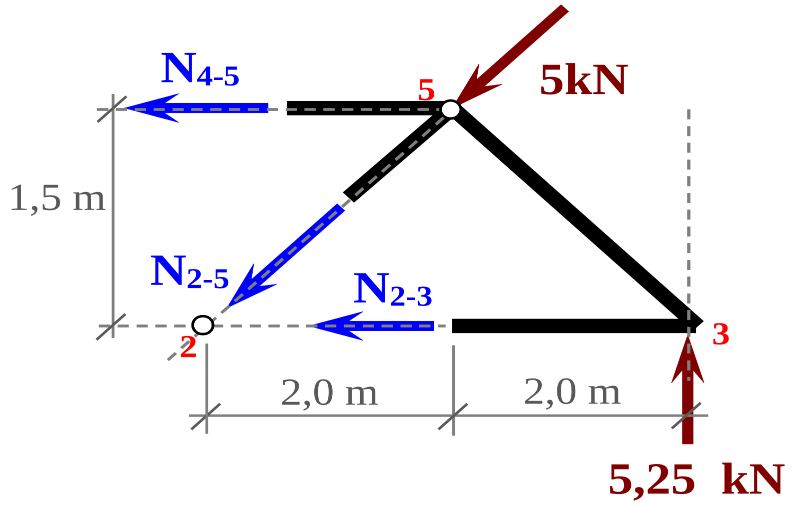
$\therefore V_3 = 5{,}25\ \text{kN}$

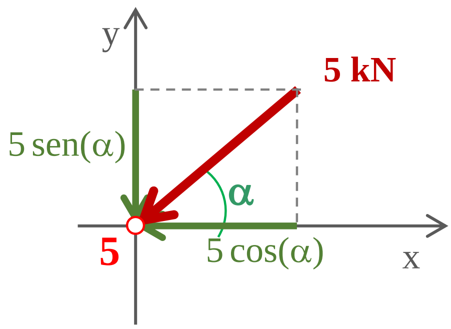
E assim, vamos utilizar o somatório de forças horizontais

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 - 5 \times \cos(\alpha) = 0$$

$\therefore H_1 = \ 4{,}00\ \text{kN}$







Utilizando as equações de equilíbrio, calculam-se os esforços normais $N_{4\text{-}5}$, $N_{2\text{-}5}$ e $N_{2\text{-}3}$ para equilibrar o lado direito da seção de Ritter indicada na figura acima.

Primeiro, vamos utilizar o somatório de momentos em torno do eixo que passa pelo nó 2

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow N_{4-5} \times 1{,}5 + 5{,}25 \times 4 = 0$$

$$\therefore N_{4-5} = -14 \text{ kN}$$

Em seguida, vamos utilizar o somatório de momentos em torno do eixo que passa pelo nó 5

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow N_{2-3} \times 1{,}5 - 5{,}25 \times 2 = 0$$

$$\therefore N_{2-3} = +7 \text{ kN}$$

E assim, vamos utilizar o somatório de forças horizontais

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{2-3} - N_{4-5} - N_{2-5}\cos(\alpha) - 5\cos(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -(7) - (-14) - N_{2-5}0{,}8 - 5 \times 0{,}8 = 0$$

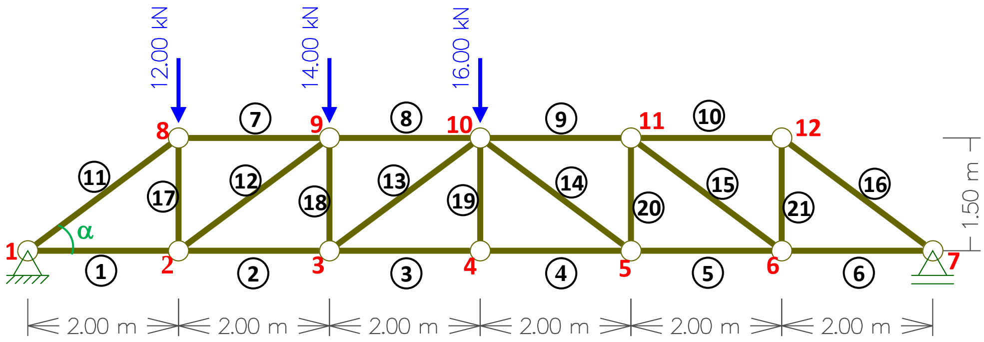
$$\therefore N_{2-5} = \ 3{,}75 \text{ kN}$$

→Note que:

1) Foram adotados os sentidos dos esforços normais sempre saindo das barras, ou seja, foram supostos esforços normais de tração;

2) O valor do esforço normal da barra 4-5 foi negativo contrariando o sentido adotado, portanto essa barra não está tracionada. A barra 4-5 está comprimida por uma força de 14 kN.

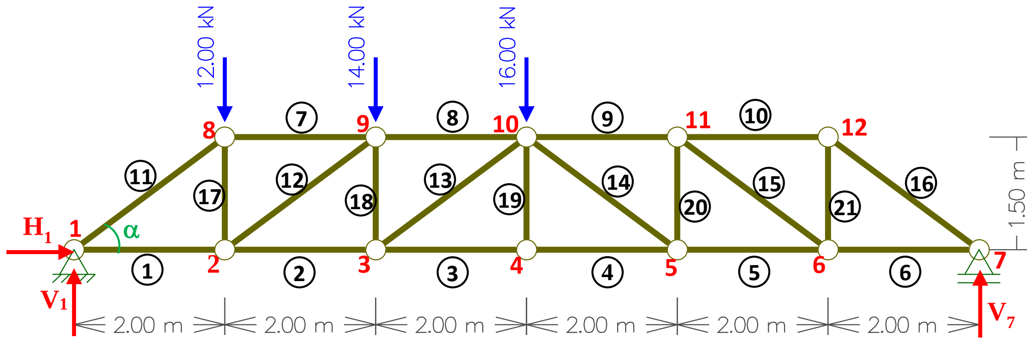
6- Calcule os esforços normais das barras 10, 15 e 5 da treliça isostática representada pela figura abaixo (considere todos os nós como rótulas perfeitas) usando o **Método de Ritter**:



B.

Solução:

→ Reações de Apoio

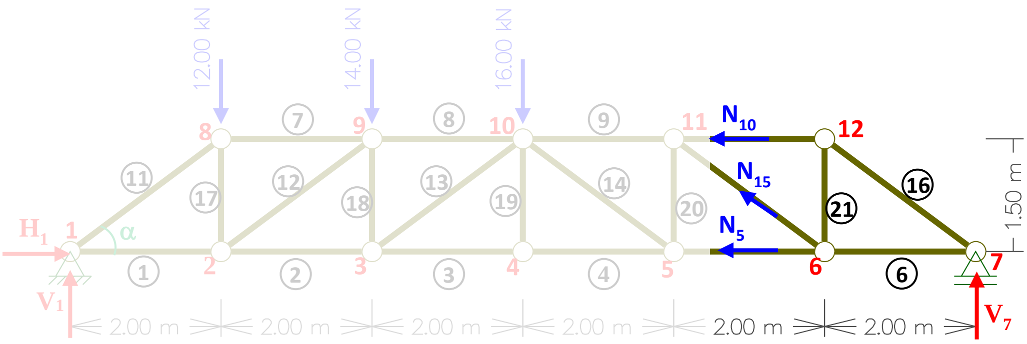


$$\text{sen}(\alpha) = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$$
$$\cos(\alpha) = \frac{2{,}0}{2{,}5} = 0{,}8$$

→ Reações de Apoio

$$\sum F_x = 0 \therefore H_1 = 0{,}00 \text{ kN}$$
$$\sum (M_z)_7 = 0 \Rightarrow V_1 \times 12 - 12 \times 10 - 14 \times 8 - 16 \times 6 = 0 \therefore V_1 = 27{,}333 \text{ kN}$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_7 - 12 - 14 - 16 = 0 \therefore V_7 = 14{,}667 \text{ kN}$$

→ Esforços Normais



Utilizando as equações de equilíbrio, calculam-se os esforços normais N_{10}, N_{15} e N_5 para equilibrar o lado direito da seção de Ritter indicada na figura acima.

Primeiro, vamos utilizar o somatório de momentos em torno do eixo que passa pelo nó 6

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow N_{10} \times 1{,}5 + V_7 \times 2 = 0$$

$$\therefore N_{10} = -19{,}556 \text{ kN}$$

Em seguida, vamos utilizar o somatório de momentos em torno do eixo que passa pelo nó 11

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow N_5 \times 1{,}5 - V_7 \times 4 = 0$$

$$\therefore N_5 = +39{,}111 \text{ kN}$$

E assim, vamos utilizar o somatório de forças verticais

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_7 + N_{15} \text{sen}(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 14{,}667 + N_{15} \times 0{,}6 = 0$$

$$\therefore N_{15} = \ -24{,}444 \text{ kN}$$

→Note que:

1) Foram adotados os sentidos dos esforços normais sempre saindo das barras, ou seja, foram supostos esforços normais de tração;

2) O valor do esforço normal da barra 10 foi negativo contrariando o sentido adotado, portanto essa barra não está tracionada. A barra 15 está comprimida por uma força de 24,444 kN.