

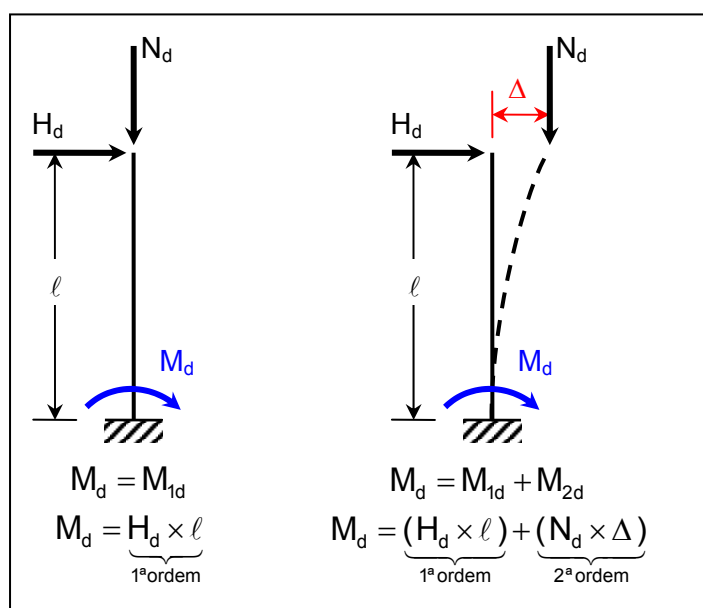
9.1 Definição

ABNT NBR 6118, item 14.4.1.2:

“Pilares: Elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes.”

9.2 Efeitos de 2ª Ordem¹

Efeitos de 2ª ordem são aqueles que se somam aos obtidos numa análise de primeira



ordem (em que o equilíbrio da estrutura é estudado na configuração geométrica inicial), quando a análise do equilíbrio passa a ser efetuada considerando a configuração deformada (Figura 9.1).

Figura 9.1 – Efeitos de 1ª e 2ª ordem

Os efeitos de 2ª ordem, em cuja determinação deve ser considerado o comportamento não-linear dos materiais, podem ser desprezados sempre que não representem acréscimo superior a 10% nas reações e nas solicitações relevantes da estrutura. Na Figura 9.1, o efeito de 2ª ordem ($N_d \times \Delta$) poderá ser desconsiderado se $M_{2d} \leq 0,10 M_{1d}$.

A análise estrutural com efeitos de 2ª ordem deve assegurar que, para as combinações mais desfavoráveis das ações de cálculo, não ocorra perda de estabilidade, nem esgotamento da capacidade resistente de cálculo.

A não-linearidade física, presente nas estruturas de concreto armado, deve ser obrigatoriamente considerada.

9.3 Classificação das Estruturas²

9.3.1 Efeitos Globais, Locais e Localizados de 2ª Ordem

Sob a ação das cargas verticais e horizontais, os nós da estrutura deslocam-se horizontalmente. Os esforços de 2ª ordem decorrentes desses deslocamentos são chamados efeitos globais de 2ª ordem. Nas barras da estrutura, como um lance de pilar, os respectivos eixos

¹ O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia dos itens 15.2 e 15.3 da ABNT NBR 6118.

² O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 15.4 da ABNT NBR 6118.

não se mantêm retilíneos, surgindo aí efeitos locais de 2ª ordem que, em princípio, afetam principalmente os esforços solicitantes ao longo delas.

9.3.2 Estruturas de Nós Fixos e Estruturas de Nós Móveis

As estruturas são consideradas, para efeito de cálculo, como de nós fixos quando os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos, e, por decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem são desprezíveis (inferiores a 10% dos respectivos esforços de 1ª ordem). Nessas estruturas, basta considerar os efeitos locais e localizados de 2ª ordem (Figura 9.2).

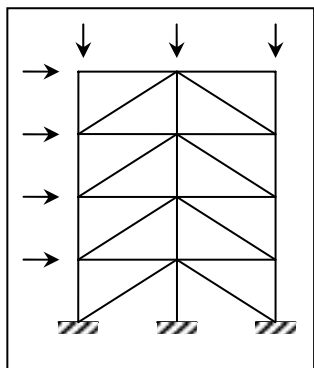


Figura 9.2 – Estruturas de nós fixos

As estruturas de nós móveis são aquelas onde os deslocamentos horizontais não são pequenos e, em decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem são importantes (superiores a 10% dos respectivos esforços de 1ª ordem). Nessas estruturas devem ser considerados tanto os esforços de 2ª ordem globais como os locais e localizados (Figura 9.3).

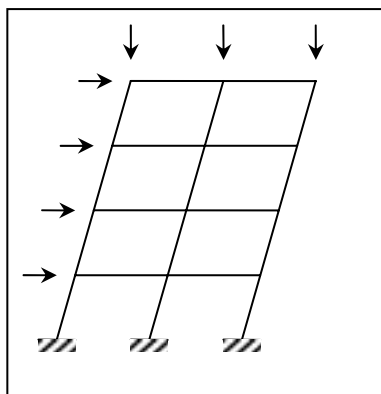


Figura 9.3 - Estruturas de nós móveis

9.3.3 Contraventamento

Por conveniência de análise, é possível identificar, dentro da estrutura, subestruturas que, devido à sua grande rigidez a ações horizontais, resistem à maior parte dos esforços decorrentes dessas ações. Essas subestruturas são chamadas subestruturas de contraventamento. Os elementos que não participam da subestrutura de contraventamento são chamados elementos contraventados. As subestruturas de contraventamento podem ser de nós fixos ou de nós móveis, de acordo com o estabelecido em 9.3.2 (Figura 9.4).

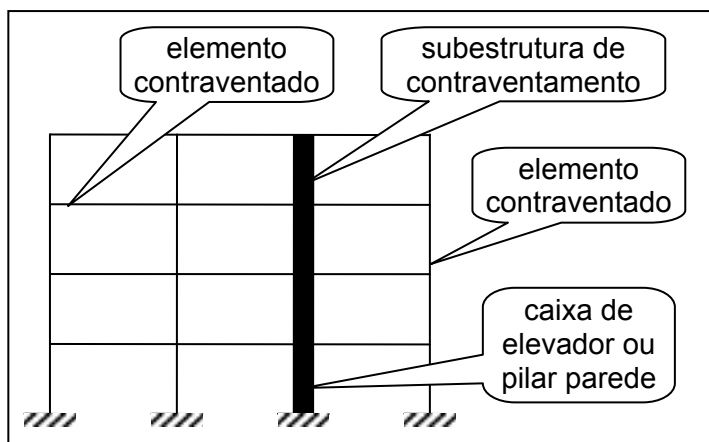


Figura 9.4 – Subestruturas de contraventamento e elementos contraventados

9.3.4 Elementos Isolados

São considerados elementos isolados, os seguintes:

- os elementos estruturais isostáticos;
- os elementos contraventados;
- os elementos das estruturas de contraventamento de nós fixos; e
- os elementos das subestruturas de contraventamento de nós móveis desde que, aos esforços nas extremidades, obtidos numa análise de 1ª ordem, sejam acrescentados os determinados por análise global de 2ª ordem.

9.4 Dispensa da Consideração dos Esforços Globais de 2ª Ordem¹

Os processos aproximados, apresentados em 9.4.1 e 9.4.2, podem ser utilizados para verificar a possibilidade de dispensa da consideração dos esforços globais de 2ª ordem, ou seja, para indicar se a estrutura pode ser classificada como de nós fixos, sem necessidade de cálculo rigoroso.

9.4.1 Parâmetro de Instabilidade

Uma estrutura reticulada simétrica pode ser considerada como sendo de nós fixos se seu parâmetro de instabilidade α satisfazer as seguintes condições:

$$\alpha = H_{\text{tot}} \sqrt{\frac{N_k}{E_{cs} I_c}} \leq \begin{cases} 0,2 + 0,1n & \langle n \leq 3 \rangle \\ 0,6 & \langle n \geq 4 \rangle \end{cases} \quad \text{Equação 9.1}$$

onde:

- n é o número de níveis de barras horizontais (andares) acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;
- H_{tot} é a altura total da estrutura, medida a partir do topo da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;
- N_k é a somatória de todas as cargas verticais atuantes na estrutura (a partir do nível considerado para o cálculo de H_{tot}), com seu valor característico; e
- $E_{cs} I_c$ representa a somatória dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada. No caso de estruturas de pórticos, de treliças ou mistas, ou com pilares de rigidez variável ao longo da altura, pode ser considerado o valor da expressão $E_{cs} I_c$ de um pilar equivalente de seção constante.

Na análise de estabilidade global pode ser adotado o valor do módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial dado em [1.4.6].

O valor de I_c deve ser calculado considerando as seções brutas dos pilares.

A rigidez do pilar equivalente deve ser determinada (Figura 9.5) da seguinte forma:

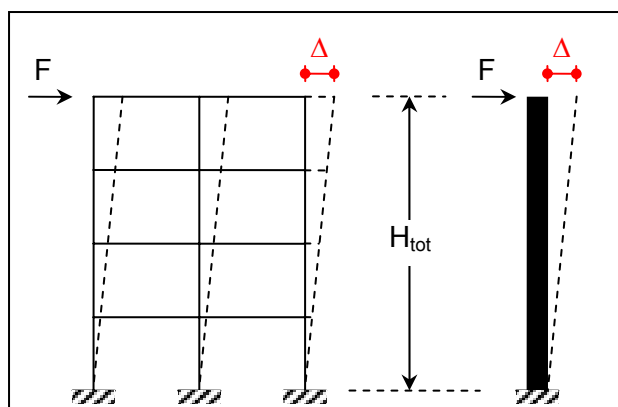


Figura 9.5 – Rigidez do pilar equivalente – estrutura de contraventamento

- calcular o deslocamento do topo da estrutura de contraventamento, sob a ação do carregamento horizontal;
- calcular a rigidez de um pilar equivalente de seção constante, engastado na base e livre no topo, de mesma altura H_{tot} , tal que, sob a ação do mesmo carregamento, sofra o mesmo deslocamento no topo.

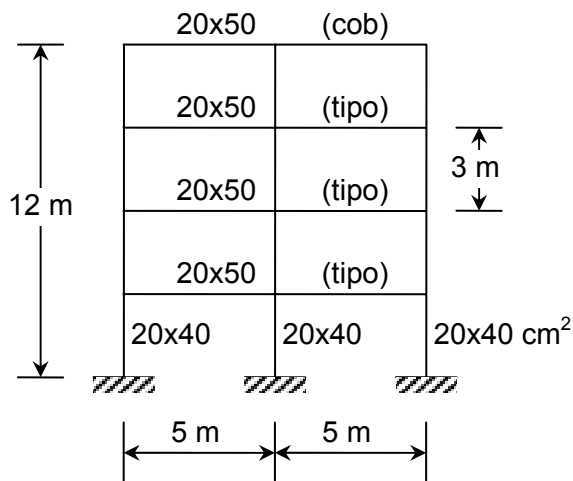
¹ O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 15.5 da ABNT NBR 6118.

O valor limite 0,6 prescrito para $n \geq 4$ é, em geral, aplicável às estruturas usuais de edifícios. Pode ser adotado para associações de pilares-parede, e para pórticos associados a pilares-parede. Pode ser aumentado para 0,7 no caso de contraventamento constituído exclusivamente por pilares-parede, e deve ser reduzido para 0,5 quando só houver pórticos.

Exemplo 9.1: Classificar a estrutura abaixo representada de acordo com seu parâmetro de instabilidade α . A estrutura corresponde a um pórtico constituído por vigas e pilares de seção retangular.

Dados:

- concreto: C25;
- seção transversal dos pilares: 20 cm x 40 cm (na direção das solicitações horizontais);
- seção transversal das vigas: 20 cm x 50 cm (na direção das solicitações horizontais);
- vão entre pilares: 5 m;
- diferença de cota entre pisos: 3 m;
- carga **acidental** da cobertura: $q_{k,cob} = 3 \text{ kN/m}$;
- carga **permanente** da cobertura: $g_{k,cob} = 12 \text{ kN/m}$;
- carga **acidental** do pavimento tipo: $q_{k,tipo} = 5 \text{ kN/m}$;
- carga **permanente** do pavimento tipo: $g_{k,tipo} = 15 \text{ kN/m}$; e
- carga do **vento**: $q_{k,vento} = 5 \text{ kN/m}$.



Solução: O parâmetro de instabilidade α fica definido pela Equação 9.1. Por se tratar de um pórtico, e sendo $n = 4$, o valor limite de α deve ser tomado igual a 0,5.

a. Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{ck} = 25 \text{ MPa} = 2,5 \text{ kN/cm}^2 \quad \langle \text{C25} \rangle$$

$$E_{ci} = 5600 \sqrt{f_{ck}} = 5600 \sqrt{25} = 28000 \text{ MPa} = 2800 \text{ kN/cm}^2 \quad \langle \text{módulo de elasticidade} \rangle$$

$$E_{cs} = 0,85 E_{ci} = 0,85 \times 2800 = 2380 \text{ kN/cm}^2 \quad \langle \text{módulo de elasticidade secante} \rangle$$

$$H_{tot} = 12,0 \text{ m} = 1200 \text{ cm} \quad \langle \text{altura total} \rangle$$

$$n = 4 \quad \langle \text{número de andares acima da fundação} \rangle$$

$$\alpha_{lim} = 0,5 \quad \langle n = 4, \text{ pórtico simples} \rangle$$

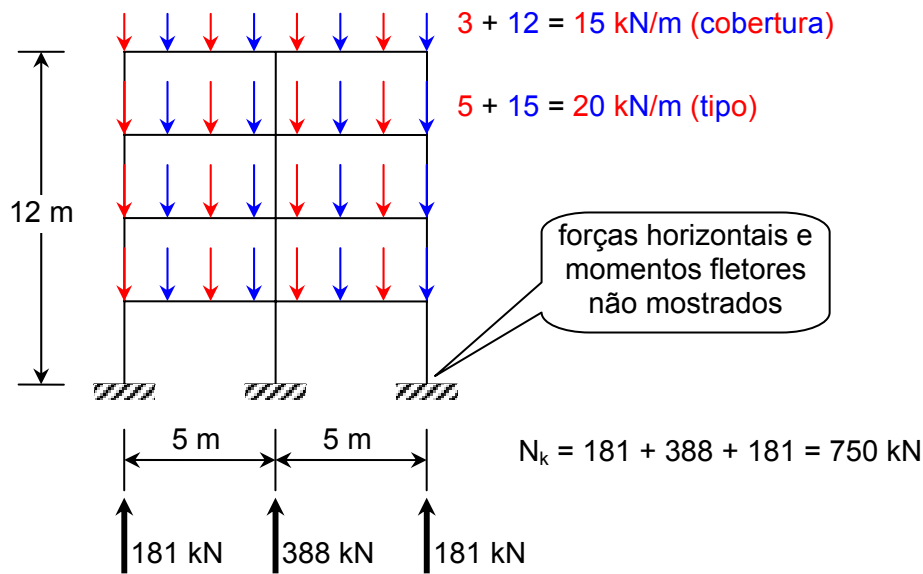
b. Determinação de N_k

Deve ser observado que as equações de cálculo para as ações, conforme estabelecido em [3.6], não se aplicam na determinação do parâmetro α . Especificamente para este caso, F_d não existe, resultando:

$$F_k = F_{gk} + F_{\varepsilon gk} + F_{qk} + F_{\varepsilon qk} \quad \langle \text{somente cargas verticais} \rangle,$$

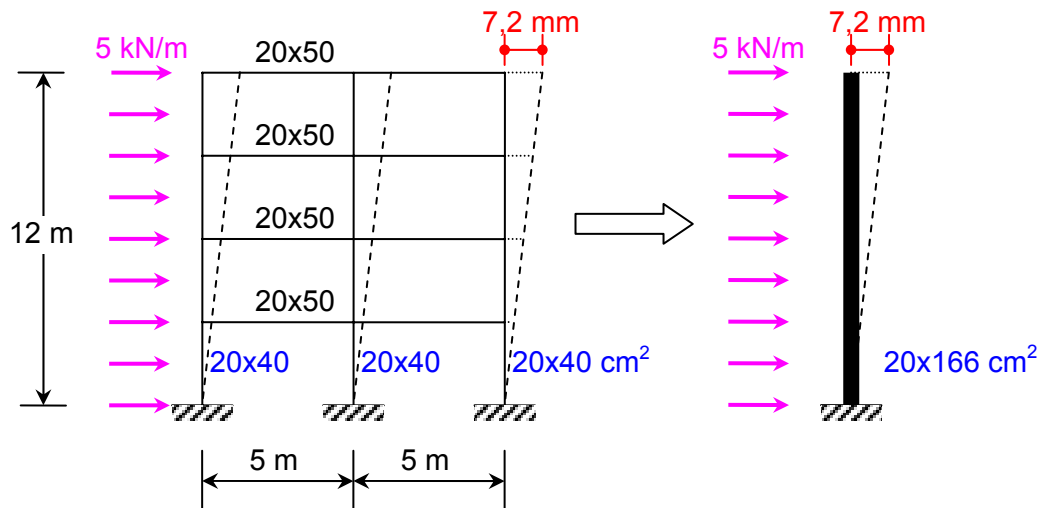
constituindo-se na combinação de ações para da determinação de α .

Com o auxílio do programa FTOOL¹, chega-se:



c. Rigidez do pilar equivalente

Com o auxílio do programa FTOOL, chega-se:



$$I_c = \frac{20 \times 166^3}{12} = 7\,623\,827 \text{ cm}^2$$

$$\alpha = 1200 \sqrt{\frac{750}{2380 \times 7\,623\,827}} = 0,24 < 0,5 \Rightarrow \text{estrutura de nós fixos}$$

9.4.2 Coeficiente γ_z

O coeficiente γ_z de avaliação da importância dos esforços de segunda ordem global é válido para estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares. Ele pode ser determinado a partir dos resultados de uma análise linear de primeira ordem, para cada caso de carregamento, adotando-se os seguintes valores de rigidez:

¹ FTOOL \Rightarrow programa destinado ao ensino do comportamento estrutural de pórticos planos, desenvolvido por Luiz Fernando Martha do Departamento de Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) [www.tecgraf.puc-rio.br/ftool].

lajes $(EI)_{sec} = 0,3E_{ci} I_c$

vigas $(EI)_{sec} = 0,4E_{ci} I_c$ para $A'_s \neq A_s$
 $(EI)_{sec} = 0,5E_{ci} I_c$ para $A'_s = A_s$

Equação 9.2

pilares $(EI)_{sec} = 0,8E_{ci} I_c$

onde:

E_{ci} é módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial dado em [1.4.6]; e
 I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto, incluindo, quando for o caso, as mesas colaborantes.

O valor de γ_z para cada combinação de carregamento é dado pela expressão:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}}$$

Equação 9.3

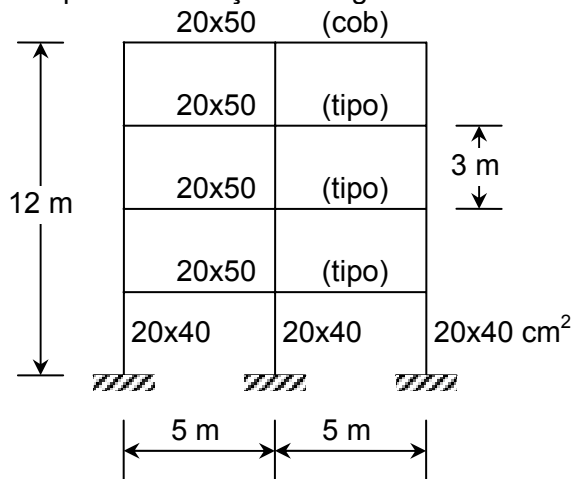
onde:

$M_{1,tot,d}$ é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura; e

$\Delta M_{tot,d}$ é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de 1ª ordem.

Considera-se que a estrutura é de nós fixos se for obedecida a condição: $\gamma_z \leq 1,1$.

Exemplo 9.2: Classificar a estrutura abaixo representada de acordo com seu parâmetro de instabilidade γ_z . A estrutura corresponde a um pórtico constituído por vigas e pilares de seção retangular.



Considerar :

estado limite último – combinação normal

Dados:

- concreto: C25;
- seção transversal dos pilares: 20 cm x 40 cm (na direção das solicitações horizontais);
- seção transversal das vigas: 20 cm x 50 cm (na direção das solicitações horizontais);
- vão entre pilares: 5 m;
- diferença de cota entre pisos: 3 m;
- carga **acidental** da cobertura: $q_{k,cob} = 3 \text{ kN/m}$ ($\psi_0 = 0,5$);

- carga permanente da cobertura: $g_{k, cob} = 12 \text{ kN/m}$;
- carga acidental do pavimento tipo: $q_{k, tipo} = 5 \text{ kN/m}$ ($\psi_0 = 0,5$);
- carga permanente do pavimento tipo: $g_{k, tipo} = 15 \text{ kN/m}$; e
- carga do vento: $q_{k, vento} = 5 \text{ kN/m}$ ($\psi_0 = 0,6$).

Solução: O parâmetro de instabilidade γ_z fica definido pela Equação 9.3, com as rigidez de vigas e pilares definidas pela Equação 9.2.

a. Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{ck} = 25 \text{ MPa} = 2,5 \text{ kN/cm}^2 \quad \langle \text{C25} \rangle$$

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}} = 5600\sqrt{25} = 28000 \text{ MPa} = 2800 \text{ kN/cm}^2 \quad \langle \text{módulo de elasticidade} \rangle$$

b. Rigidez equivalente das vigas e pilares (Equação 9.2)

$$[(EI)_{sec}]_{viga} = 0,4E_{ci} I_c = \underbrace{(0,4E_{ci})}_{E_{c,viga}} I_c$$

$$E_{c,viga} = 0,4 \times 28000 = 11200 \text{ MPa} = 1120 \text{ kN/cm}^2$$

$$[(EI)_{sec}]_{pilar} = 0,8E_{ci} I_c = \underbrace{(0,8E_{ci})}_{E_{c,pilar}} I_c$$

$$E_{c,pilar} = 0,8 \times 28000 = 22400 \text{ MPa} = 2240 \text{ kN/cm}^2$$

c. Combinações de ações

Deve ser observado que as equações de cálculo para as ações, conforme estabelecido em [3.6], se aplicam na determinação do parâmetro γ_z . As combinações possíveis das ações resultam:

$$F_d^{(1)} = 1,4F_{gk} + 1,4(F_{qk, acid} + 0,6F_{qk, vento})$$

$$F_d^{(2)} = 1,4F_{gk} + 1,4(F_{qk, vento} + 0,5F_{qk, acid})$$

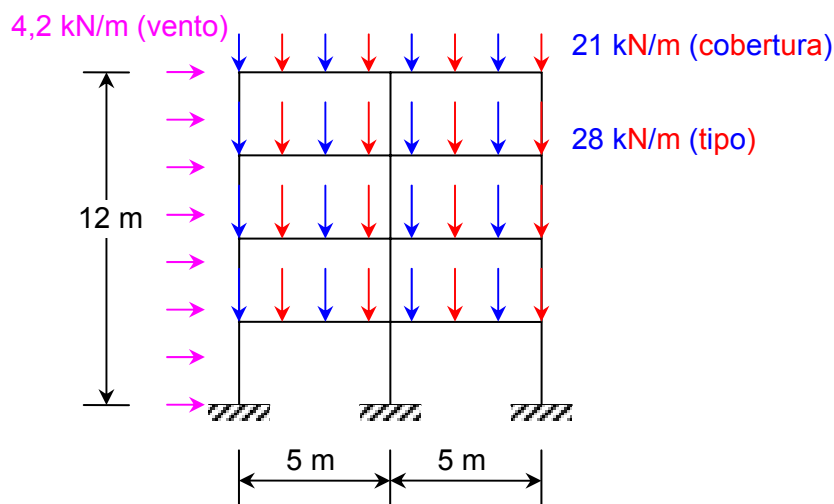
$$F_d^{(3)} = 1,0F_{gk} + 1,4(F_{qk, acid} + 0,6F_{qk, vento})$$

$$F_d^{(4)} = 1,0F_{gk} + 1,4(F_{qk, vento} + 0,5F_{qk, acid})$$

d. 1ª combinação

$$F_d^{(1)} = 1,4F_{gk} + 1,4(F_{qk, acid} + 0,6F_{qk, vento})$$

$$F_d^{(1)} = 1,4F_{gk} + 1,4F_{qk, acid} + 0,84F_{qk, vento}$$



cobertura:

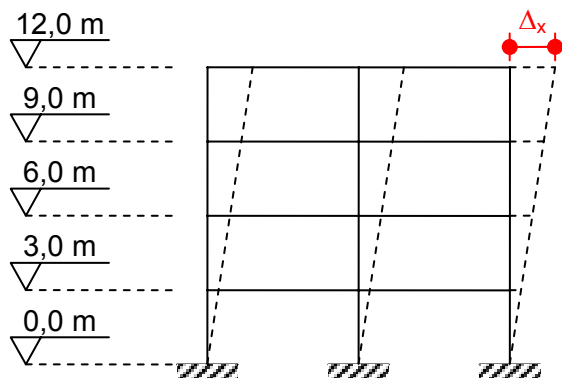
$$(g + q)_d = 1,4 \times 12 + 1,4 \times 3 = 21 \text{ kN/m} \Rightarrow \text{carga vertical}$$

tipo:

$$(g + q)_d = 1,4 \times 15 + 1,4 \times 5 = 28 \text{ kN/m} \Rightarrow \text{carga vertical}$$

vento:

$(q)_d = 0,84 \times 5 = 4,2 \text{ kN/m} \Rightarrow$ carga horizontal
Com o auxílio do programa FTOOL, chega-se:



Cota (m)	$\Delta_{x,\text{médio}}$ (mm)	$N_{d,\text{cota}}$ (kN)	$N_d \times \Delta_x$ (kNmm)
0,0	0,0	0,0	0
3,0	2,7	280,0	756
6,0	5,9	280,0	1652
9,0	8,1	280,0	2268
12,0	9,1	210,0	1911
$\Delta M_{\text{tot},d} =$			6587

$\Delta_{x,\text{médio}}$: deslocamento horizontal médio dos nós do pórtico, na cota considerada.

$N_{d,\text{cota}}$: carga vertical total, na cota considerada (vão x carga distribuída).

$$M_{1,\text{tot},d} = \frac{(q)_{d,\text{vento}} \times \ell^2}{2} = \frac{4,2 \times 12^2}{2} = 302,4 \text{ kNm} = 302\,400 \text{ kNmm}$$

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{\text{tot},d}}{M_{1,\text{tot},d}}} = \frac{1}{1 - \frac{6587}{302400}} = 1,022 < 1,1 \Rightarrow \text{estrutura de nós fixos}$$

e. demais combinações

Repete-se o processo para as diferentes combinações de carregamentos. Para o carregamento 2, γ_z igual a 1,020; carregamento 3, γ_z igual a 1,017; e carregamento 4, γ_z igual a 1,015.

9.5 Imperfeições Geométricas - Efeitos de 1ª Ordem¹

De modo geral, os carregamentos (carga permanente, carga acidental, vento, etc), combinados como mostrado em [3.6], provocam nas estruturas solicitações (momento fletor, força normal, força cortante, etc) e deformações (deslocamentos, rotações, etc). Quando as deformações são de pequena monta, diz-se que os efeitos causados na estrutura são de 1ª ordem.

É sabido porém, que, de uma forma genérica, as construções de concreto são geometricamente imperfeitas, apresentando, antes do carregamento, deformações decorrentes do processo construtivo.

No caso das estruturas reticuladas, por exemplo, existem imperfeições na posição e forma dos eixos das peças, na forma e dimensões da seção transversal, na distribuição da armadura, etc. Muitas dessas imperfeições podem ser cobertas apenas pelos coeficientes de ponderação, mas as imperfeições dos eixos das peças, não. Elas devem ser explicitamente consideradas, porque têm efeitos significativos sobre a estabilidade da construção. Esses efeitos decorrem não só das solicitações diretamente atuantes, mas também da fluência e da sensibilidade a

¹ O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 11.3.3.4 da ABNT NBR 6118.

imperfeições das estruturas de concreto. Esses efeitos são considerados, também, como de 1ª ordem.

Na verificação do estado limite último das estruturas reticuladas, devem ser consideradas as imperfeições geométricas do eixo dos elementos estruturais da estrutura descarregada. Essas imperfeições podem ser divididas em dois grupos:

- imperfeições globais; e
- imperfeições locais.

9.5.1 Imperfeições Globais – Desaprumo da Estrutura

Na análise global das estruturas, sejam elas contraventadas ou não, deve ser considerado um desaprumo dos elementos verticais conforme mostrado na Figura 9.6. Considerando θ_1 como sendo o desaprumo de um elemento vertical contínuo e θ_a o desaprumo global da estrutura, seus valores são determinados pela Equação 9.4 e Equação 9.5, respectivamente.

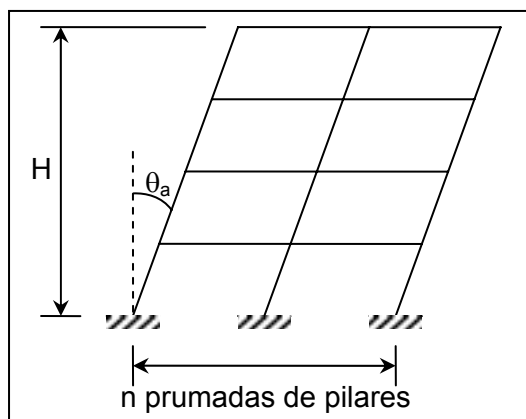


Figura 9.6 – Imperfeições geométricas global

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}}$$

$$\frac{1}{200} \geq \theta_1 \geq \begin{cases} \frac{1}{400} & \langle \text{estruturas de nós fixos} \rangle \\ \frac{1}{300} & \langle \text{estruturas de nós móveis} \rangle \end{cases} \quad \text{Equação 9.4}$$

$$\theta_a = \theta_1 \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \quad \text{Equação 9.5}$$

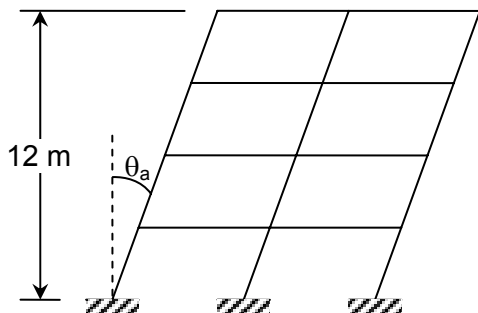
onde:

- H é a altura total da edificação, em metros; e
- n é o número total de elementos verticais contínuos.

ABNT NBR 6118, item 11.3.3.4-b:

“O desaprumo não deve necessariamente ser superposto ao carregamento de vento. Entre os dois, vento e desaprumo, pode ser considerado apenas o mais desfavorável, que pode ser definido através do que provoca o maior momento total na base de construção.”

Exemplo 9.3: Determinar o desaprumo da estrutura abaixo representada. Considerar estrutura de nós fixos e móveis.



Solução: O desaprumo fica definido pela Equação 9.4 e Equação 9.5.

a. Dados

$$H = 12\text{m} \text{ (altura total da estrutura)}$$

$$n = 3 \text{ (número total de elementos verticais contínuos)}$$

b. θ_1 para estrutura de nós fixos

$$\frac{1}{200} \geq \theta_1 \geq \frac{1}{400} \Rightarrow \text{estrutura de nós fixos}$$

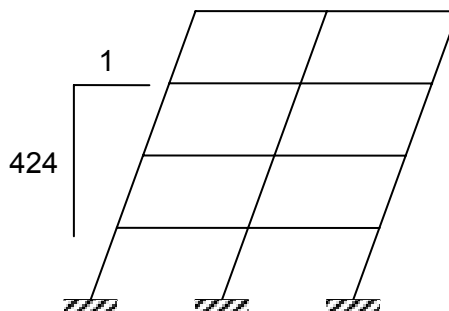
$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{12}} = \frac{1}{346} \text{ OK}$$

c. θ_a para estrutura de nós fixos

$$\theta_a = \theta_1 \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\theta_a = \frac{1}{346} \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{424}$$



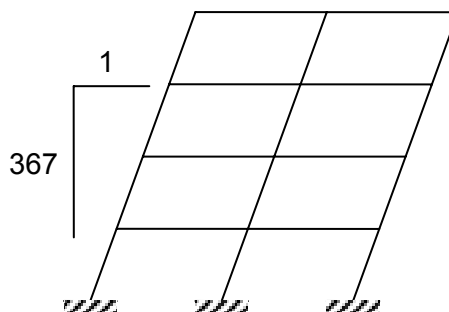
d. θ_1 para estrutura de nós móveis

$$\frac{1}{200} \geq \theta_1 \geq \frac{1}{300} \Rightarrow \text{estrutura de nós móveis}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{12}} = \frac{1}{346} < \frac{1}{300} \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{300}$$

e. θ_a para estrutura de nós móveis

$$\theta_a = \frac{1}{300} \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{367}$$



9.5.2 Imperfeições Locais – Desaprumo de Um Lance de Pilar

No caso de elementos que ligam pilares contraventados¹ a pilares de contraventamento², usualmente vigas e lajes, deve ser considerada a tração decorrente do desaprumo do pilar contraventado, conforme mostrado na Figura 9.7.

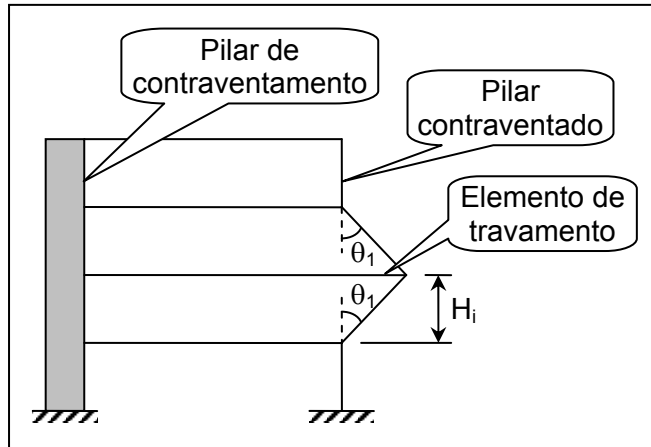


Figura 9.7 – Elementos de travamento (tracionado ou comprimido)

Considerando H_i como sendo a altura de um lance de pilar (Figura 9.7), em metros, define-se θ_1 como sendo:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H_i}} \begin{cases} \leq \frac{1}{200} \\ \geq \frac{1}{300} \end{cases} \quad \text{Equação 9.6}$$

No caso da verificação de um lance de pilar, deve ser considerado o efeito da falta de retilinidade do eixo do pilar³ (Figura 9.8.a) ou do desaprumo (Figura 9.8.b). Admite-se que, nos casos usuais, a consideração apenas da falta de retilinidade ao longo do lance de pilar seja suficiente.

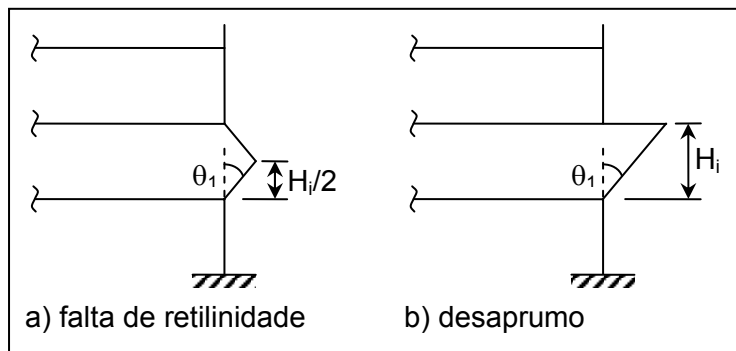


Figura 9.8 – Imperfeições geométricas locais

9.5.3 Momento Mínimo de 1ª Ordem – Consideração das Imperfeições Locais

O efeito das imperfeições locais nos pilares pode ser substituído em estruturas reticuladas pela consideração do momento mínimo de 1ª ordem dado a seguir:

$$M_{1d,min} = N_d(0,015 + 0,03h) \quad \text{Equação 9.7}$$

onde:

- h é a altura total da seção transversal na direção considerada, em metros; e
- N_d é a força normal de cálculo.

Nas estruturas reticuladas usuais admite-se que o efeito das imperfeições locais esteja atendido se for respeitado esse valor de momento total mínimo. A este momento devem ser acrescidos os momentos de 2º ordem com apresentados em 9.7.

¹ Pilares de pouca rigidez a ações horizontais.

² Pilares de grande rigidez a ações horizontais que resistem à maior parte dos esforços decorrentes dessas ações.

³ No caso da falta de retilinidade do eixo do pilar usar $H_i/2$ na raiz quadrada da Equação 9.6.

Pode-se dizer que o efeito das imperfeições locais estará atendido se for considerado atuando no pilar uma força normal N_d associada a uma excentricidade mínima dada por:

$$e_{1,\min} = 0,015 + 0,03h \quad \text{Equação 9.8}$$

ABNT NBR 6118, item 16.3:

“Deve-se observar, também, que não se aceita o dimensionamento de pilares para carga centrada.”

De qualquer forma, é possível estabelecer uma equação geral para a excentricidade que leva em consideração a falta de retilinidade do pilar, como mostrado na Figura 9.9.

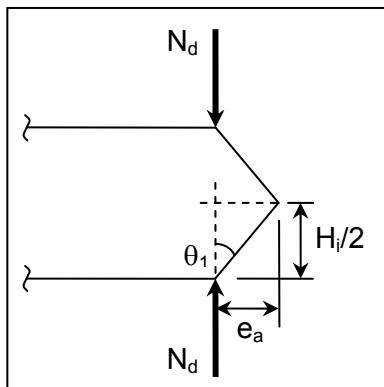


Figura 9.9 – Excentricidade por falta de retilinidade de pilar

Da Figura 9.9 tem-se:

$$\theta_1 = \frac{e_a}{\frac{H_i}{2}} = \frac{2e_a}{H_i}$$

Considerando a Equação 9.6, com $H_i/2$ definindo a falta de retilinidade do pilar, chega-se:

$$\theta_1 = \frac{2e_a}{H_i} = \frac{1}{100\sqrt{\frac{H_i}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \leq \frac{1}{200} \\ \geq \frac{1}{300} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{e_a}{H_i} = \frac{1}{200\sqrt{\frac{H_i}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \leq \frac{1}{400} \\ \geq \frac{1}{600} \end{array} \right.$$

Desta forma, a Equação 9.8 pode ser estendida para:

$$\frac{e_a}{H_i} = \frac{1}{200\sqrt{\frac{H_i}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \leq \frac{1}{400} \\ \geq \frac{1}{600} \end{array} \right. \quad H_i \text{ em metros} \quad \text{Equação 9.9}$$

Exemplo 9.4: Determinar o valor de excentricidade de 1ª ordem e_a para um pilar cuja seção transversal tem altura (h) igual a 40 cm. Este pilar poderá ter altura (H_i) variando entre 7 e 14 m.

Solução: A solução do problema consiste na aplicação da Equação 9.9.

a. Excentricidade mínima e_1

$$e_{1,\min} = 0,015 + 0,03h$$

$$e_{1,\min} = 0,015 + (0,03 \times 0,4) = 0,027\text{m} = 2,7\text{cm}$$

b. Pilar com 7 m da altura

$$\frac{e_a}{H_i} = \frac{1}{200\sqrt{\frac{H_i}{2}}} = \frac{1}{200 \times \sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{374} \left\{ \begin{array}{l} \leq \frac{1}{400} \\ \geq \frac{1}{600} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{e_a}{H_i} = \frac{1}{400}$$

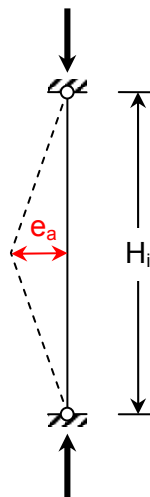
$$e_a = \frac{7}{400} = 0,018\text{m} = 1,8\text{cm} < 2,7\text{cm}$$

c. Pilar com 14 m da altura

$$\frac{e_a}{H_i} = \frac{1}{200\sqrt{\frac{H_i}{2}}} = \frac{1}{200 \times \sqrt{\frac{14}{2}}} = \frac{1}{529} \left\{ \begin{array}{l} \leq \frac{1}{400} \\ \geq \frac{1}{600} \end{array} \right.$$

$$e_a = \frac{14}{529} = 0,026\text{m} = 2,6\text{cm} < 2,7\text{cm}$$

Para alturas superiores a 15 m, a equação de θ_1 (e_a) passa a prevalecer sobre a equação de $e_{1,\min}$.



O modo simplificado de representar o momento total $M_{1d,\min}$ de primeira ordem está mostrado na Figura 9.10.

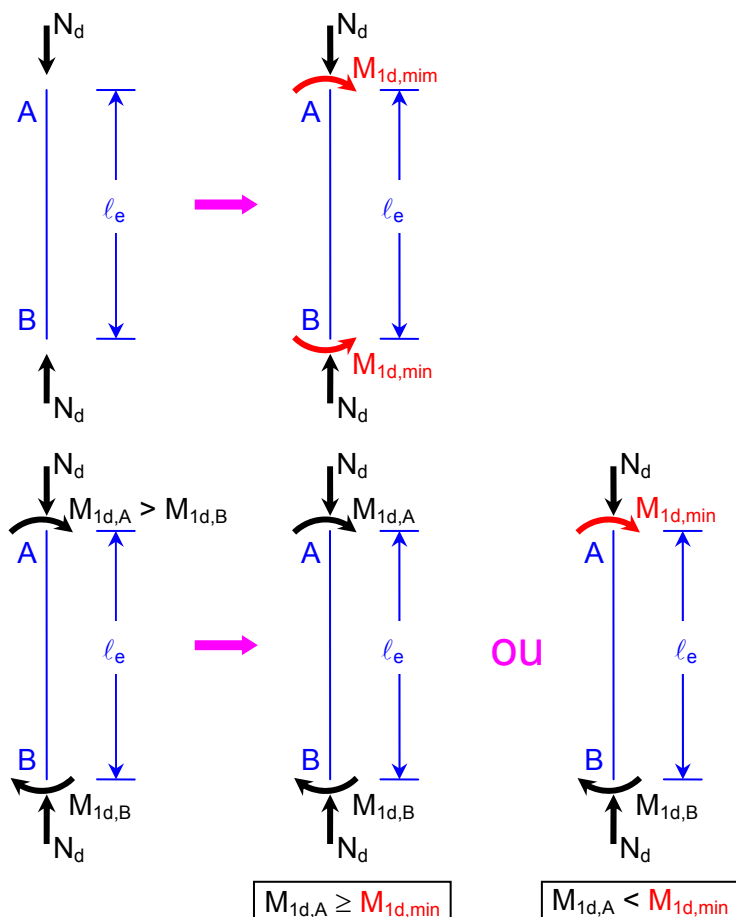
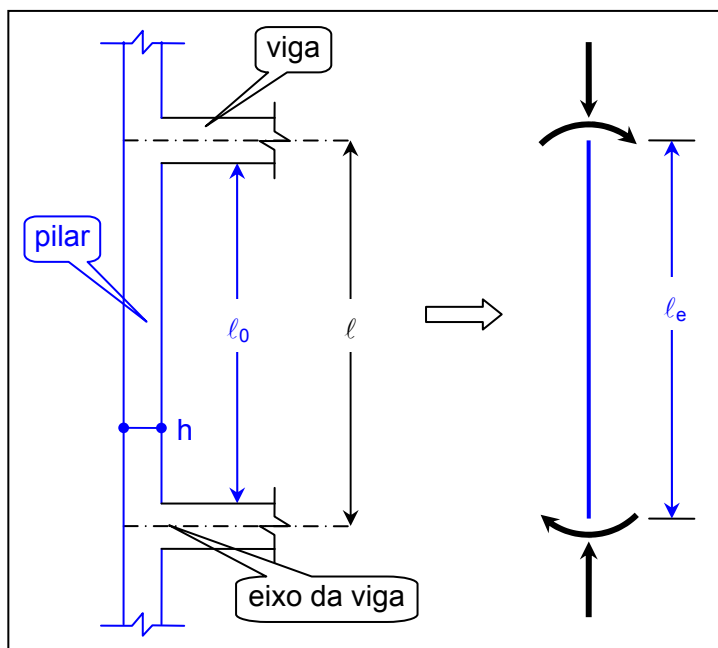


Figura 9.10 – Momento mínimo de 1ª ordem

9.6 Análise de Estruturas de Nós Fixos¹

Nas estruturas de nós fixos, o cálculo pode ser realizado considerando cada elemento



comprimido isoladamente (Figura 9.11), como barra vinculada nas extremidades aos demais elementos estruturais que ali concorrem, onde se aplicam os esforços obtidos pela análise da estrutura efetuada segundo a teoria de 1ª ordem.

O comprimento equivalente l_e do elemento comprimido (pilar), suposto vinculado em ambas as extremidades, é dado pela Equação 9.10.

Figura 9.11 – Elemento isolado de estrutura de nó fixo

$$l_e = l_0 + h \leq l \quad \text{Equação 9.10}$$

onde:

- l_0 é a distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar;
- h é a altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo; e
- l é a distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.

A análise dos efeitos locais de 2ª ordem deve ser realizada de acordo com o estabelecido em 9.7.

Sob a ação de forças horizontais, a estrutura é sempre calculada como deslocável. O fato de a estrutura ser classificada como sendo de nós fixos dispensa apenas a consideração dos esforços globais de 2ª ordem.

9.7 Análise de Elementos Isolados²

Os itens 9.7.1 e 9.7.2.1 são aplicáveis apenas a elementos isolados de seção constante e armadura constante ao longo de seu eixo, submetidos a flexo-compressão.

Os pilares devem ter índice de esbeltez menor ou igual a 200 ($\lambda \leq 200$). Apenas no caso de postes com força normal menor que $0,10 f_{cd} A_c$, o índice de esbeltez pode ser maior que 200.

O índice de esbeltez deve ser calculado pela expressão:

$$\lambda = \frac{l_e}{i} \quad \text{Equação 9.11}$$

onde:

- l_e é o comprimento equivalente do pilar; e
- i é o raio de giração da seção transversal do pilar.

No caso de pilar engastado na base e livre no topo, o valor de l_e deve ser tomado igual a $2l$ (Figura 9.12). Nos demais casos adotar os valores calculados conforme 9.5 (Equação 9.10).

¹ O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 15.6 da ABNT NBR 6118.

² O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 15.8 da ABNT NBR 6118.

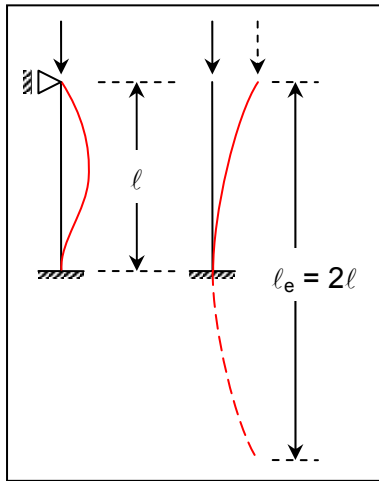
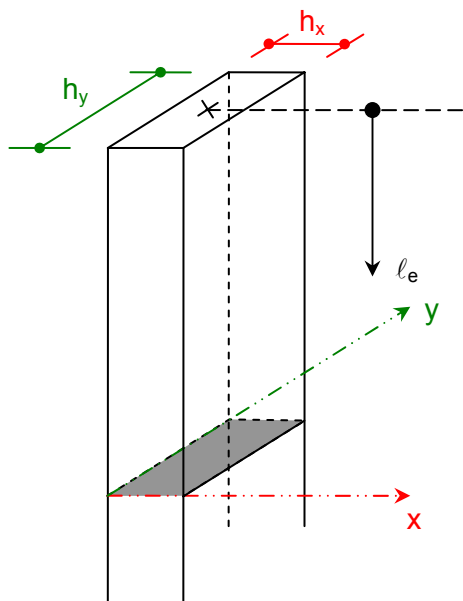


Figura 9.12 – Comprimentos equivalentes de pilar

Exemplo 9.5: Estabelecer os índices de esbeltez (λ) para pilares de seção retangular e circular.

Solução: Os índices de esbeltez (λ) ficam definidos pela Equação 9.11. Para a seção retangular devem ser observados os valores dos raios de giração (momentos de inércia) nas duas direções.

a. Seção retangular



$$I_x = \frac{h_y \times h_x^3}{12} \quad \langle \text{rigidez na direção } x \Rightarrow \text{possível flambagem na direção } x \rangle^1$$

$$I_y = \frac{h_x \times h_y^3}{12} \quad \langle \text{rigidez na direção } y \Rightarrow \text{possível flambagem na direção } y \rangle^2$$

$$A_c = h_x \times h_y \quad \langle \text{área da seção transversal do pilar} \rangle$$

¹ Observar que o momento de inércia I_x é referido a direção x . Corresponde ao momento de inércia I_{yy} da Resistência dos Materiais (momento de inércia em torno do eixo yy).

² Observar que o momento de inércia I_y é referido a direção y . Corresponde ao momento de inércia I_{xx} da Resistência dos Materiais (momento de inércia em torno do eixo xx).

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A_c}} = \sqrt{\frac{h_y \times h_x^3}{12 h_x \times h_y}} = \frac{h_x}{\sqrt{12}} \quad \langle \text{raio de giração na direção } x \rangle$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A_c}} = \sqrt{\frac{h_x \times h_y^3}{12 h_x \times h_y}} = \frac{h_y}{\sqrt{12}} \quad \langle \text{raio de giração na direção } y \rangle$$

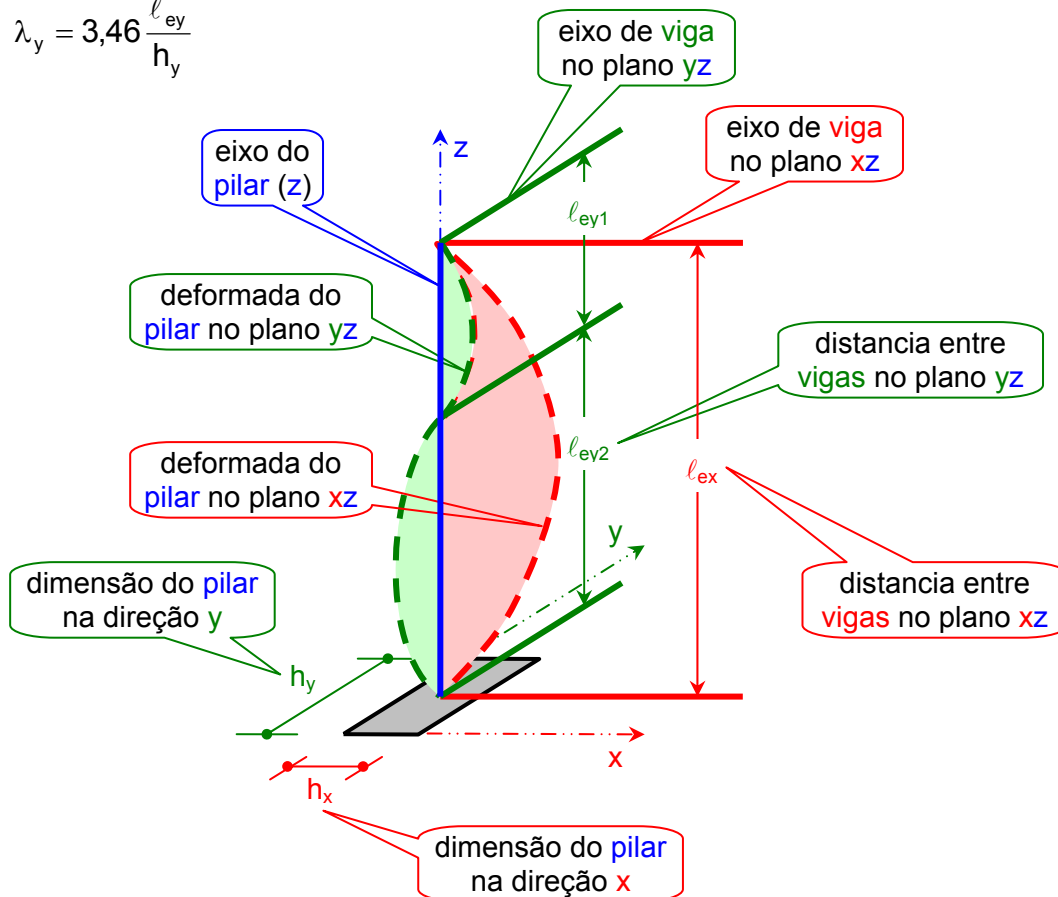
$$\lambda_x = \frac{l_e}{i_x} = \frac{l_e}{\frac{h_x}{\sqrt{12}}} = \sqrt{12} \frac{l_e}{h_x} = 3,46 \frac{l_e}{h_x} \quad \langle \text{índice de esbeltez na direção } x \rangle$$

$$\lambda_y = \frac{l_e}{i_y} = \frac{l_e}{\frac{h_y}{\sqrt{12}}} = \sqrt{12} \frac{l_e}{h_y} = 3,46 \frac{l_e}{h_y} \quad \langle \text{índice de esbeltez na direção } y \rangle$$

Caso os comprimentos equivalentes sejam diferentes nas direções x e y ($l_{ex} \neq l_{ey}$), os valores de λ resultam:

$$\lambda_x = 3,46 \frac{l_{ex}}{h_x}$$

$$\lambda_y = 3,46 \frac{l_{ey}}{h_y}$$



A deformada pilar se dará no plano xz (flambagem na direção x) se $\lambda_x > \lambda_y$. Caso contrário ($\lambda_y > \lambda_x$), a deformada pilar se dará no plano yz (flambagem na direção y).

b. Seção circular

$$I = \frac{\pi \times d^4}{64} \quad \langle \text{rigidez em qualquer direção} \rangle$$

$$A_c = \frac{\pi \times d^2}{4} \quad \langle \text{área da seção transversal do pilar} \rangle$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A_c}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \times d^4}{64}}{\frac{\pi \times d^2}{4}}} = \frac{d}{4} \quad \langle \text{raio de giração em qualquer direção} \rangle$$

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} = \frac{\ell_e}{\frac{d}{4}} = 4,0 \frac{\ell_e}{d} \quad \langle \text{índice de esbeltez em qualquer direção} \rangle$$

9.7.1 Dispensa da Análise dos Efeitos Locais de 2ª ordem¹

Os esforços locais de 2ª ordem em elementos isolados podem ser desprezados quando o índice de esbeltez for menor que o valor limite λ_1 estabelecido a seguir.

O valor de λ_1 depende de diversos fatores, mas os preponderantes são:

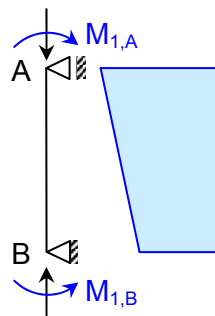
- a excentricidade relativa de 1ª ordem e_1/h ;
- a vinculação dos extremos da coluna isolada; e
- a forma do diagrama de momentos de 1ª ordem.

O valor de λ_1 poder ser calculado pela expressão:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right. \quad \text{Equação 9.12}$$

onde o valor de α_b deve ser obtido conforme estabelecido a seguir:

- a. pilares biapoiados sem cargas transversais
 - a.1 momentos de mesmo sinal (tracionam a mesma face)



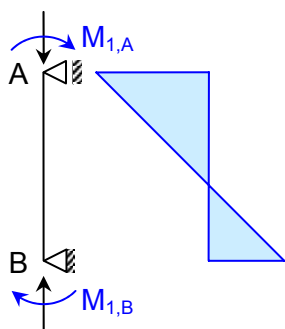
$M_{1,A}$ e $M_{1,B}$ são momentos de 1ª ordem nos extremos do pilar, com $|M_{1,A}| \geq |M_{1,B}|$ (valores absolutos).

$$\alpha_b = 0,60 + 0,40 \frac{|M_{1,B}|}{|M_{1,A}|}$$

$$\alpha_b = 1,00 \quad \left\{ \begin{array}{l} |M_{1d,A}| < |M_{1d,\min}| \\ \text{ou} \\ M_{1,A} = M_{1,B} = 0,0 \text{ (compressão centrada)} \end{array} \right. \quad \text{Equação 9.13}$$

¹ O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 15.8.2 da ABNT NBR 6118

a.2 momentos de sinais diferentes (não tracionam a mesma face)



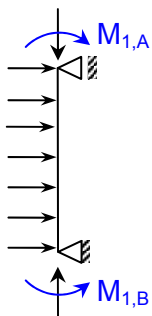
$M_{1,A}$ e $M_{1,B}$ são momentos de 1ª ordem nos extremos do pilar, com $|M_{1,A}| \geq |M_{1,B}|$ (valores absolutos).

$$\alpha_b = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1,B}|}{|M_{1,A}|} \geq 0,40$$

$$\alpha_b = 1,00 \left\{ \begin{array}{l} |M_{1d,A}| < |M_{1d,min}| \\ \text{ou} \\ M_{1,A} = M_{1,B} = 0,0 \text{ (compressão centrada)} \end{array} \right.$$

Equação 9.14

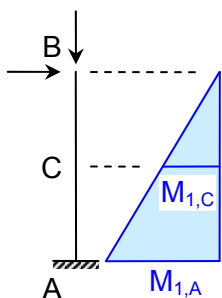
b. pilares biapoiados com cargas transversais significativas ao longo da altura



$$\alpha_b = 1,00$$

Equação 9.15

c. pilares em balanço



$M_{1,A}$ é o momento de 1ª ordem no engaste e $M_{1,C}$ é o momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço, em valores absolutos.

$$\alpha_b = 0,80 + 0,20 \frac{|M_{1,C}|}{|M_{1,A}|} \geq 0,85$$

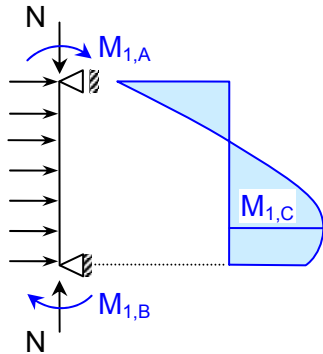
$$\alpha_b = 1,00 \left\{ \begin{array}{l} |M_{1d,A}| < |M_{1d,min}| \\ \text{ou} \\ M_{1,A} = M_{1,C} = 0,0 \text{ (compressão centrada)} \end{array} \right.$$

Equação 9.16

Algumas observações se fazem necessárias quanto à aplicação da Equação 9.12 (equação para definição do valor λ_1). São elas:

- Excentricidade e_1

Embora não explicitamente citado na ABNT NBR 6118, pode-se entender que o valor da excentricidade e_1 será referente ao maior, em valor absoluto, momento fletor. Se, na figura ao lado, $M_{1,A}$ corresponder ao maior momento (valor absoluto), e_1 será dado por:



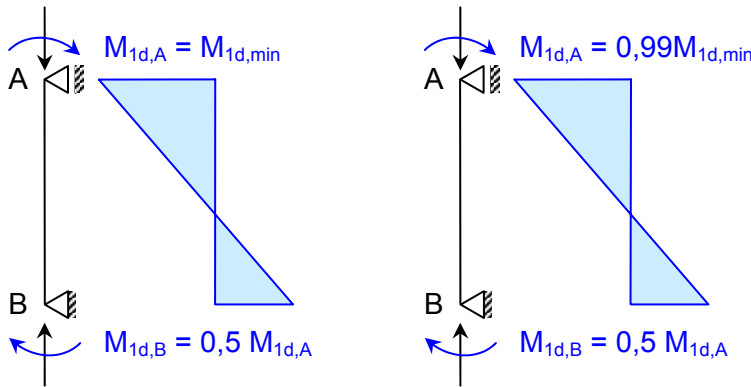
$$e_1 = \frac{|M_{1,A}|}{N}$$

Para valores de cálculo:

$$e_1 = \frac{|M_{1d,A}|}{N_d}$$

- Valores próximos de $M_{1d,A}$ e $M_{1d,min}$

Para efeito de raciocínio, vamos admitir que em dois pilares de mesma seção transversal e mesmo comprimento equivalente (mesma altura) atue momentos fletores como mostrados na figura ao lado. Admitindo que os pilares tenham seção transversal quadrada, de dimensão 20 cm, pela Equação 9.8, chega-se:



PILAR 1

PILAR 2

$$e_{1,min} = 0,015 + 0,03h$$

$$e_{1,min} = 0,015 + 0,03 \times 0,2 = 0,021\text{m} = 2,1\text{cm}$$

$$e_{1,min} = e_1 = 2,1\text{cm}$$

$$\frac{e_1}{h} = \frac{2,1}{20} = 0,105$$

O Pilar 1 pode ser enquadrado no item a.2, de tal forma que (Equação 9.14):

$$\alpha_b = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1d,B}|}{|M_{1d,A}|} \geq 0,40$$

$$\alpha_{b,PILAR1} = 0,60 - 0,40 \times \frac{0,5M_{1d,A}}{M_{1d,A}} = 0,40$$

Pela Equação 9.12, tem-se:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \begin{cases} \geq 35 \\ \leq 90 \end{cases}$$

$$\lambda_{1,\text{PILAR1}} = \frac{25 + 12,5 \times 0,105}{0,40} = 65,8 \quad \left. \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_{1,\text{PILAR1}} = 65,8$$

Para o Pilar 2, sendo o valor de $M_{1d,A}$ inferior a $M_{1d,\min}$, ainda de acordo com o item a.2 (Equação 9.14), tem-se:

$$\alpha_{b,\text{PILAR2}} = 1,00$$

Pela Equação 9.12, tem-se:

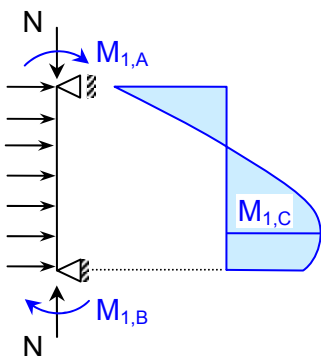
$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad \left. \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right\}$$

$$\lambda_{1,\text{PILAR2}} = \frac{25 + 12,5 \times 0,105}{1,0} = 26,3 \quad \left. \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_{1,\text{PILAR2}} = 35,0$$

Os valores calculados para λ_1 indicam que o pilar P1 ($\lambda_1 = 65,8$) tem um valor limite para esbeltez 1,9 vezes maior que o valor limite para o pilar P2 ($\lambda_1 = 35,0$), embora os mesmos tenham a mesma altura, as mesmas dimensões e o mesmo carregamento (a diferença de 1% nos valores de $M_{1d,A}$ não justifica a diferença nos valores de λ_1). Há, portanto, a necessidade de usar com cuidado os valores de α_b .

– Cargas transversais significativas

O item b anteriormente referido faz referência a “pilares biapoitados com cargas transversais significativas ao longo da altura”. O que não se sabe é como quantificar carga transversal significativa. Talvez a referência seja feita à figura ao lado quando um momento intermediário resulte, em valor absoluto, maior que os momentos das extremidades ($|M_{1,C}| \geq |M_{1,A}| \geq |M_{1,B}|$).



Como pode ser observado, a interpretação do item 15.8.2 da ABNT NBR 6118/2003, referente à determinação de λ_1 , requer alguns cuidados. A ABNT NBR 6118/1980 era bem mais simples neste assunto.

ABNT NBR 6118/1980:

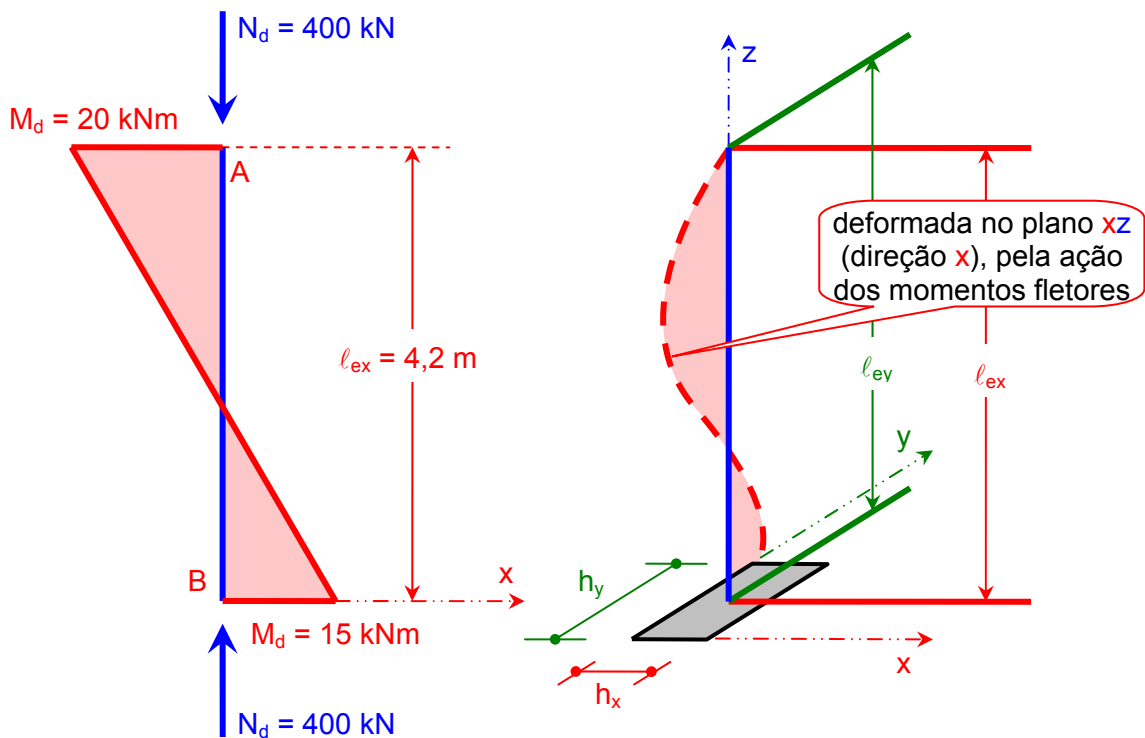
“4.1.1.3 Compressão por força normal F_d (barras isoladas)

.....
A consideração ou não consideração, no cálculo, do efeito das deformações obedecerá ao seguinte critério:

- quando $\lambda \leq 40$, este efeito pode ser desprezado;
- quando $\lambda > 40$, o efeito das deformações será obrigatoriamente considerado (teoria de 2ª ordem).”

Como pode ser visto houve uma grande mudança entre a edição da ABNT NBR 6118 de 1980 e a de 2003 no que se refere à consideração ou não dos efeitos de 2ª ordem em barras isoladas. Pela edição de 1980 o valor correspondente de λ_1 ficaria limitado a 40 enquanto que a edição de 2003 prevê um valor limite de 90 (Equação 9.12). Em caso de dúvida, considerar sempre α_b da ABNT NBR 6118/2003 igual a 1,00, o que levaria a valores de λ_1 mais próximos do recomendado pela ABNT NBR 6118/1980.

Exemplo 9.6: Verificar, para o pilar abaixo indicado, se os efeitos de 2ª ordem devem ser considerados. O pilar tem dimensão igual a 20 cm na direção x (onde atuam os momentos fletores) e 40 cm na direção y.



Solução: A solução do problema consiste na determinação do valor λ , dado pela Equação 9.11, e no valor λ_1 , dado pela Equação 9.12, com α_b determinado pela Equação 9.14. A comparação entre estes valores define se os efeitos de 2ª ordem devem ou não ser considerados no dimensionamento do pilar. O valor de $M_{1d,min}$ é dado pela Equação 9.7.

a. Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$h_x = 20 \text{ cm (direção x)}$$

$$h_y = 40 \text{ cm (direção y)}$$

$$l_{ex} = 4,2\text{m} = 420\text{cm (direção x)}$$

$$l_{ey} = 4,2\text{m} = 420\text{cm (direção y)}$$

$$N_d = 400\text{kN}$$

$$M_{1xd,A} = 20\text{kNm} = 2000\text{kNcm (plano xz)}$$

$$M_{1xd,B} = 15\text{kNm} = 1500\text{kNcm (plano xz)}$$

$$M_{1xd,min} = N_d(0,015 + 0,03h_x)$$

$$M_{1xd,min} = 400 \times [0,015 + (0,03 \times 0,20)] = 8,40\text{kNm} = 840\text{kNcm}$$

$$M_{1yd,A} = 0\text{kNm} = 0\text{kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,B} = 0\text{kNm} = 0\text{kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,min} = N_d(0,015 + 0,03h_y)$$

$$M_{1yd,min} = 400 \times [0,015 + (0,03 \times 0,40)] = 10,80\text{kNm} = 1080\text{kNcm}$$

b. Determinação de λ_x e λ_y (ver Exemplo 9.5)

$$\lambda_x = 3,46 \frac{l_{ex}}{h_x} = 3,46 \times \frac{420}{20} = 72,7 \text{ (direção x)}$$

$$\lambda_y = 3,46 \frac{l_{ey}}{h_y} = 3,46 \times \frac{420}{40} = 36,3 \text{ (direção y)}$$

c. Determinação de λ_1 na direção x

$$\underbrace{M_{1xd,A}}_{20\text{kNm}} > \underbrace{M_{1xd,\min}}_{8,4\text{kNm}} \Rightarrow \alpha_{bx} < 1,0$$

$$e_{1x} = e_{1x,A} = \frac{M_{1xd,A}}{N_d} = \frac{2000}{400} = 5,00 \text{ cm}$$

$$\alpha_b = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1,B}|}{|M_{1,A}|} \geq 0,40 \text{ (item 9.7.1-a.2)}$$

$$\alpha_{bx} = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1xd,B}|}{|M_{1xd,A}|} \geq 0,40$$

$$\alpha_{bx} = 0,60 - 0,40 \times \frac{1500}{2000} = 0,30 < 0,40 \Rightarrow \alpha_{bx} = 0,40 \text{ (direção x)}$$

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right.$$

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + 12,5 \frac{e_{1x}}{h_x}}{\alpha_{bx}} \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right.$$

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + \left(12,5 \times \frac{5,0}{20,0}\right)}{0,40} = 70,3 \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_{1x} = 70,3 \text{ (direção x)}$$

$$\underbrace{\lambda_x}_{72,7} > \underbrace{\lambda_{1x}}_{70,3} \Rightarrow \text{considerar efeitos de 2ª ordem}$$

d. Determinação de λ_1 na direção y

$$\underbrace{M_{1yd,A}}_{0\text{kNm}} < \underbrace{M_{1yd,\min}}_{10,8\text{kNm}} \Rightarrow \alpha_{by} = 1,0 \text{ (item 9.7.1-a)}$$

$$e_{1y} = e_{1y,A} = \frac{M_{1yd,A}}{N_d} = \frac{0}{400} = 0,0 \text{ cm}$$

$$\lambda_{1y} = \frac{25 + \left(12,5 \times \frac{0,0}{40,0}\right)}{1,0} = 25,0 \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_{1y} = 35,0 \text{ (direção y)}$$

$$\underbrace{\lambda_y}_{36,3} > \underbrace{\lambda_{1y}}_{35,0} \Rightarrow \text{considerar efeitos de 2ª ordem}$$

9.7.2 Determinação dos Efeitos Locais de 2ª Ordem

No caso de barras submetidas a flexo-compressão normal, o cálculo pode ser feito pelo método geral ou por métodos aproximados. Para barras submetidas a flexo-compressão oblíqua deve ser seguido o estabelecido em 9.7.2.4.

A consideração da fluência é obrigatória para $\lambda > 90$.

9.7.2.1 Método Geral

Consiste na análise não-linear de 2ª ordem efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação momento-curvatura real em cada seção, e consideração da não-linearidade geométrica de maneira não aproximada.

O método geral é obrigatório para $\lambda > 140$.

9.7.2.2 Método Aproximado 1 - Pilar Padrão com Curvatura Aproximada

Pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo.

A não-linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não-linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.

O momento total máximo no pilar deve ser calculado pela expressão:

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \times \frac{\ell_e^2}{10} \times \frac{1}{r} \geq M_{1d,A}$$

Equação 9.17

$$M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

sendo $M_{1d,min}$ definido pela Equação 9.7.

A curvatura na seção crítica pode ser avaliada pela expressão aproximada:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

Equação 9.18

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

onde:

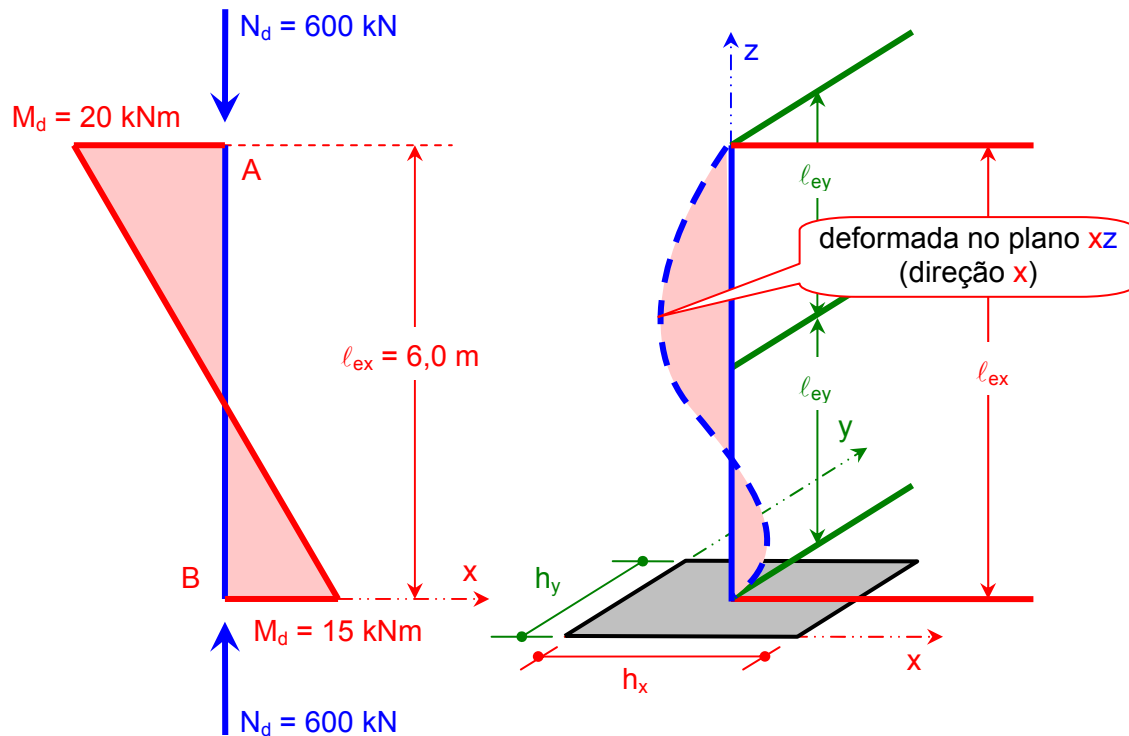
h é a altura da seção do pilar na direção considerada; e

v é a força normal adimensional

O momento $M_{1d,A}$ e o coeficiente α_b têm as mesmas definições estabelecidas em 9.7.1, sendo $M_{1d,A}$ o valor de cálculo de 1ª ordem do momento $M_{1,A}$. O momento $M_{1d,min}$ tem o significado e o valor estabelecidos em 9.5.3.

Exemplo 9.7: Determinar o valor de $M_{d,tot}$ para o pilar abaixo indicado. Esse pilar, de seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo, tem dimensão igual a 40 cm na direção do plano onde atuam os momentos fletores (direção x) e dimensão 25 cm na outra direção (direção y). Na direção y existe uma viga intermediária (meia altura) entre os pontos A e B. O valor de $M_{d,tot}$ deverá ser calculado pelo Método do Pilar Padrão com Curvatura Aproximada, considerando concreto classe C20 ($\gamma_c = 1,4$).

Solução: A solução do problema consiste na determinação do valor λ dado pela Equação 9.11 e no valor λ_1 dado pela Equação 9.12 para verificar a necessidade, ou não, de serem considerados os efeitos de 2ª ordem. O valor de $M_{d,tot}$ fica definido pela Equação 9.17 combinada com a Equação 9.18. O valor de $M_{1d,min}$ é definido pela Equação 9.7.



a. Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{20}{1,4} = 14,3 \text{ MPa} = 1,43 \text{ kN/cm}^2$$

$$h_x = 40 \text{ cm (direção x)}$$

$$h_y = 25 \text{ cm (direção y)}$$

$$A_c = h_x \times h_y = 40 \times 25 = 1000 \text{ cm}^2$$

$$l_{ex} = 6,0 \text{ m} = 600 \text{ cm (direção x)}$$

$$l_{ey} = 3,0 \text{ m} = 300 \text{ cm (direção y)}$$

$$N_d = 600 \text{ kN}$$

$$M_{1xd,A} = 20 \text{ kNm} = 2000 \text{ kNcm (plano xz)}$$

$$M_{1xd,B} = 15 \text{ kNm} = 1500 \text{ kNcm (plano xz)}$$

$$M_{1xd,min} = N_d(0,015 + 0,03h_x)$$

$$M_{1xd,min} = 600 \times [0,015 + (0,03 \times 0,40)] = 16,2 \text{ kNm} = 1620 \text{ kNcm}$$

$$M_{1yd,A} = 0 \text{ kNm} = 0 \text{ kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,B} = 0 \text{ kNm} = 0 \text{ kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,min} = N_d(0,015 + 0,03h_y)$$

$$M_{1yd,min} = 600 \times [0,015 + (0,03 \times 0,25)] = 13,5 \text{ kNm} = 1350 \text{ kNcm}$$

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} = \frac{600}{1000 \times 1,43} = 0,42$$

b. Determinação de λ_x e λ_y (ver Exemplo 9.5)

$$\lambda_x = 3,46 \frac{l_{ex}}{h_x} = 3,46 \times \frac{600}{40} = 51,9 \text{ (direção x)}$$

$$\lambda_y = 3,46 \frac{l_{ey}}{h_y} = 3,46 \times \frac{300}{25} = 41,5 \text{ (direção y)}$$

c. Determinação de λ_1 na direção x

$$\underbrace{M_{1xd,A}}_{20\text{kNm}} > \underbrace{M_{1xd,\min}}_{16,2\text{kNm}} \Rightarrow \alpha_{bx} < 1,0$$

$$e_{1x} = e_{1x,A} = \frac{M_{1xd,A}}{N_d} = \frac{2000}{600} = 3,33 \text{ cm}$$

$$\alpha_b = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1,B}|}{|M_{1,A}|} \geq 0,40 \text{ (item 9.7.1-a.2)}$$

$$\alpha_{bx} = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1xd,B}|}{|M_{1xd,A}|} \geq 0,40$$

$$\alpha_{bx} = 0,60 - 0,40 \times \frac{1500}{2000} = 0,30 < 0,40 \Rightarrow \alpha_{bx} = 0,40 \text{ (direção x)}$$

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right.$$

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + 12,5 \frac{e_{1x}}{h_x}}{\alpha_{bx}} \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right.$$

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + \left(12,5 \times \frac{3,33}{40,0}\right)}{0,40} = 65,1 \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_{1x} = 65,1 \text{ (direção x)}$$

$$\underbrace{\lambda_x}_{51,9} < \underbrace{\lambda_{1x}}_{65,1} \Rightarrow \text{n\~{a}o considerar efeitos de 2^a ordem}$$

$$\underbrace{M_{1xd,A}}_{20\text{kNm}} > \underbrace{M_{1xd,\min}}_{16,2\text{kNm}} \Rightarrow M_{xd,\text{tot}} = M_{1xd,A} = 2000\text{kNcm}$$

$$e_{x,\text{tot}} = \frac{M_{xd,\text{tot}}}{N_d} = \frac{2000}{600} = 3,33 \text{ cm (direção x)}$$

d. Determinação de λ_1 na direção y

$$\underbrace{M_{1yd,A}}_{0\text{kNm}} < \underbrace{M_{1yd,\min}}_{13,5\text{kNm}} \Rightarrow \alpha_{by} = 1,0 \text{ (item 9.7.1-a)}$$

$$e_{1y} = e_{1y,A} = \frac{M_{1yd,A}}{N_d} = \frac{0}{600} = 0,0 \text{ cm}$$

$$\lambda_{1y} = \frac{25 + \left(12,5 \times \frac{0,0}{25,0}\right)}{1,0} = 25,0 \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_{1y} = 35,0 \text{ (direção y)}$$

$$\underbrace{\lambda_y}_{41,5} > \underbrace{\lambda_{1y}}_{35,0} \Rightarrow \text{considerar efeitos de 2^a ordem}$$

e. Determinação do raio de curvatura na direção y

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{0,005}{h_y(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h_y}$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{0,005}{25(0,42+0,5)} = \frac{1}{4600} \text{ cm}^{-1} > \frac{1}{5000} \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{r_x} = \frac{1}{5000} \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{0,005}{h_y} = \frac{0,005}{25} = \frac{1}{5000} \text{ cm}^{-1}$$

f. Determinação do momento total máximo na direção y

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \times \frac{\ell_e^2}{10} \times \frac{1}{r} \geq M_{1d,A}$$

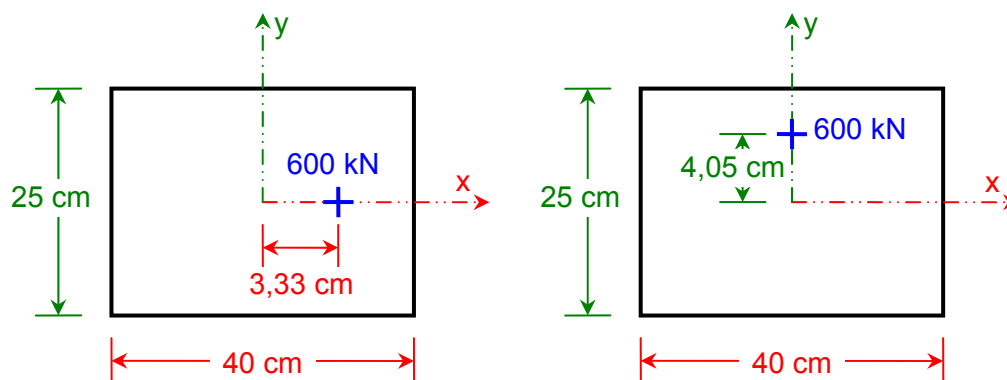
$$M_{y,d,tot} = \alpha_{by} M_{1y,d,A} + N_d \times \frac{\ell_{ey}^2}{10} \times \frac{1}{r_y} \geq M_{1y,d,A}$$

$$\underbrace{M_{1y,d,A}}_{0 \text{ kNm}} < \underbrace{M_{1y,d,min}}_{13,5 \text{ kNm}} \Rightarrow M_{1y,d,A} = 13,5 \text{ kNm} = 1350 \text{ kNcm}$$

$$M_{y,d,tot} = (1,0 \times 1350) + \left(600 \times \frac{300^2}{10} \times \frac{1}{5000} \right) = 2430 \text{ kNcm} > 1350 \text{ kNcm} \quad \text{OK}$$

$$e_{y,tot} = \frac{M_{y,d,tot}}{N_d} = \frac{2430}{600} = 4,05 \text{ cm (direção y)}$$

g. Condições de dimensionamento



9.7.2.3 Método Aproximado 2 - Pilar Padrão com Rigidez κ Aproximada

Pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, seção retangular constante, armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo.

A não-linearidade geométrica deve ser considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não-linearidade física deve ser considerada através de uma expressão aproximada da rigidez.

O momento total máximo $M_{d,tot}$ no pilar deve ser calculado a partir da majoração do momento de 1ª ordem pela expressão:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b M_{1d,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \frac{\kappa}{v}}} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,min} \end{cases} \quad \text{Equação 9.19}$$

O valor da rigidez adimensional κ é dado pela expressão:

$$\frac{\kappa}{v} = 32 \left(1 + 5 \frac{M_{d,tot}}{hN_d} \right) \quad \text{Equação 9.20}$$

A determinação de $M_{d,tot}$, variável, simultaneamente, da Equação 9.19 e da Equação 9.20, pode ser obtida fazendo-se:

$$a = 1,0$$

$$b = 0,2hN_d - \frac{\lambda^2 hN_d}{19200} - \alpha_b M_{1d,A}$$

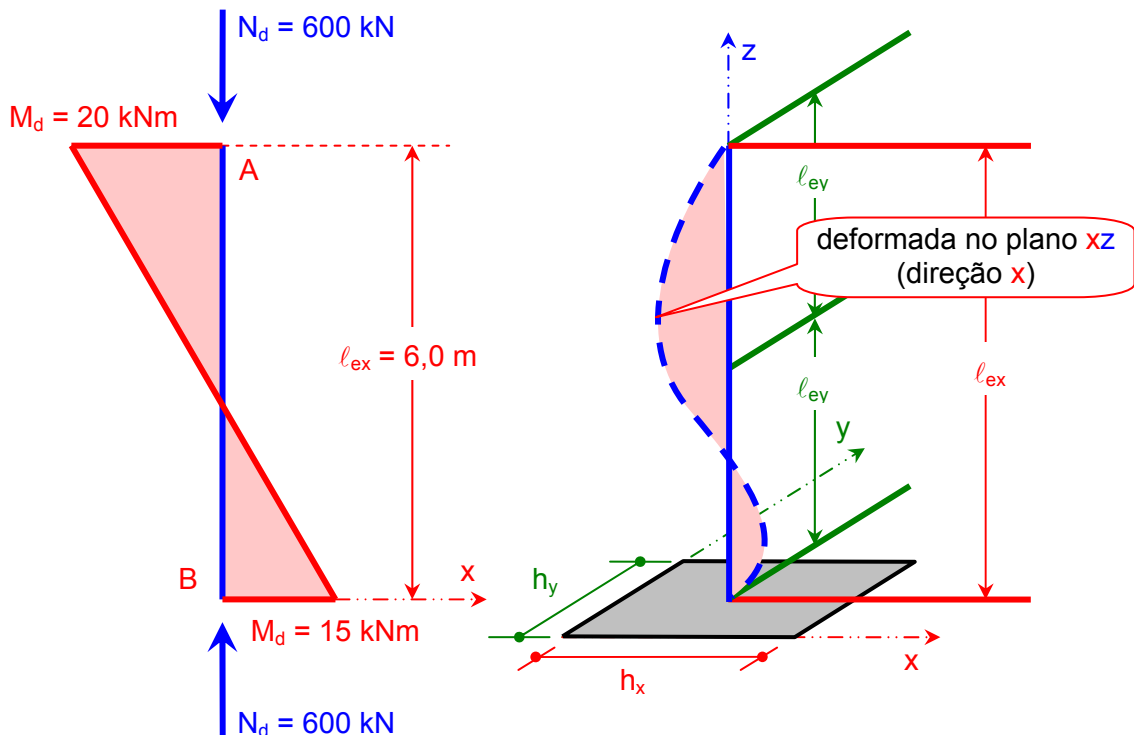
$$c = -0,2\alpha_b M_{1d,A} hN_d$$

$$M_{d,tot} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Equação 9.21}$$

As variáveis h , v , $M_{1d,A}$ e α_b são as mesmas definidas em 9.7.2.2.

Exemplo 9.8: Determinar o valor de $M_{d,tot}$ para o pilar abaixo indicado. Esse pilar, de seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo, tem dimensão igual a 40 cm na direção do plano onde atuam os momentos fletores (direção x) e dimensão 25 cm na outra direção (direção y). Na direção y existe uma viga intermediária (meia altura) entre os pontos A e B. O valor de $M_{d,tot}$ deverá ser calculado pelo Método do Pilar Padrão com Rigidez κ Aproximada.



Solução: A solução do problema consiste na determinação do valor λ dado pela Equação 9.11 e no valor λ_1 dado pela Equação 9.12 para verificar a necessidade, ou não, de serem considerados os efeitos de 2ª ordem. O valor de $M_{d,tot}$ fica definido pela Equação 9.21. O valor de $M_{1d,min}$ é definido pela Equação 9.7.

a. Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$h_x = 40 \text{ cm (direção } x)$$

$$h_y = 25 \text{ cm (direção } y)$$

$$l_{ex} = 6,0 \text{ m} = 600 \text{ cm (direção } x)$$

$$l_{ey} = 3,0 \text{ m} = 300 \text{ cm (direção } y)$$

$$N_d = 600 \text{ kN}$$

$$M_{1xd,A} = 20 \text{ kNm} = 2000 \text{ kNcm (plano xz)}$$

$$M_{1xd,B} = 15 \text{ kNm} = 1500 \text{ kNcm (plano xz)}$$

$$M_{1xd,\min} = N_d(0,015 + 0,03h_x)$$

$$M_{1xd,\min} = 600 \times [0,015 + (0,03 \times 0,40)] = 16,2 \text{ kNm} = 1620 \text{ kNcm}$$

$$M_{1yd,A} = 0 \text{ kNm} = 0 \text{ kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,B} = 0 \text{ kNm} = 0 \text{ kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,\min} = N_d(0,015 + 0,03h_y)$$

$$M_{1yd,\min} = 600 \times [0,015 + (0,03 \times 0,25)] = 13,5 \text{ kNm} = 1350 \text{ kNcm}$$

b. Determinação de λ_x e λ_y (ver Exemplo 9.5)

$$\lambda_x = 3,46 \frac{\ell_{ex}}{h_x} = 3,46 \times \frac{600}{40} = 51,9 \text{ (direção x)}$$

$$\lambda_y = 3,46 \frac{\ell_{ey}}{h_y} = 3,46 \times \frac{300}{25} = 41,5 \text{ (direção y)}$$

c. Determinação de λ_1 na direção x

$$\underbrace{M_{1xd,A}}_{20 \text{ kNm}} > \underbrace{M_{1xd,\min}}_{16,2 \text{ kNm}} \Rightarrow \alpha_{bx} < 1,0$$

$$e_{1x} = e_{1x,A} = \frac{M_{1xd,A}}{N_d} = \frac{2000}{600} = 3,33 \text{ cm}$$

$$\alpha_b = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1,B}|}{|M_{1,A}|} \geq 0,40 \text{ (item 9-17-a.2)}$$

$$\alpha_{bx} = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1xd,B}|}{|M_{1xd,A}|} \geq 0,40$$

$$\alpha_{bx} = 0,60 - 0,40 \times \frac{1500}{2000} = 0,30 < 0,40 \Rightarrow \alpha_{bx} = 0,40 \text{ (direção x)}$$

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right.$$

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + 12,5 \frac{e_{1x}}{h_x}}{\alpha_{bx}} \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right.$$

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + \left(12,5 \times \frac{3,33}{40,0}\right)}{0,40} = 65,1 \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_{1x} = 65,1 \text{ (direção x)}$$

$$\underbrace{\lambda_x}_{51,9} < \underbrace{\lambda_{1x}}_{65,1} \Rightarrow \text{n\~{a}o considerar efeitos de 2^a \text{ ordem}}$$

$$\underbrace{M_{1xd,A}}_{20 \text{ kNm}} > \underbrace{M_{1xd,\min}}_{16,2 \text{ kNm}} \Rightarrow M_{xd,\text{tot}} = M_{1xd,A} = 2000 \text{ kNcm}$$

$$e_{x,\text{tot}} = \frac{M_{xd,\text{tot}}}{N_d} = \frac{2000}{600} = 3,33 \text{ cm (direção x)}$$

d. Determinação de λ_1 na direção y

$$\underbrace{M_{1yd,A}}_{0\text{kNm}} < \underbrace{M_{1yd,\min}}_{13,5\text{kNm}} \Rightarrow \alpha_{by} = 1,0 \text{ (item 9.7.1-a)}$$

$$e_{1y} = e_{1y,A} = \frac{M_{1yd,A}}{N_d} = \frac{0}{600} = 0,0 \text{ cm}$$

$$\lambda_{1y} = \frac{25 + \left(12,5 \times \frac{0,0}{25,0}\right)}{1,0} = 25,0 \left\{ \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_{1y} = 35,0 \text{ (direção y)}$$

$$\underbrace{\lambda_y}_{41,5} > \underbrace{\lambda_{1y}}_{35,0} \Rightarrow \text{considerar efeitos de 2ª ordem}$$

e. Determinação do momento total na direção y

$$\underbrace{M_{1yd,A}}_{0\text{kNm}} < \underbrace{M_{1yd,\min}}_{13,5\text{kNm}} \Rightarrow M_{1yd,A} = 13,5\text{kNm} = 1350\text{kNcm}$$

$$\alpha_{by} = 1,0$$

$$\lambda_y = 41,5$$

$$h_y = 25 \text{ cm}$$

$$N_d = 600 \text{ kN}$$

$$b = 0,2hN_d - \frac{\lambda^2 hN_d}{19200} - \alpha_b M_{1d,A}$$

$$b = 0,2 \times 25 \times 600 - \frac{41,5^2 \times 25 \times 600}{19200} - 1,0 \times 1350 = 304,492$$

$$c = -0,2\alpha_b M_{1d,A} hN_d$$

$$c = -0,2 \times 1,0 \times 1350 \times 25 \times 600 = -4\,050\,000$$

$$M_{d,\text{tot}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$M_{d,\text{tot}} = \frac{-304,492 + \sqrt{304,492^2 - 4 \times (-4\,050\,000)}}{2} = 1866 \text{ kNcm}$$

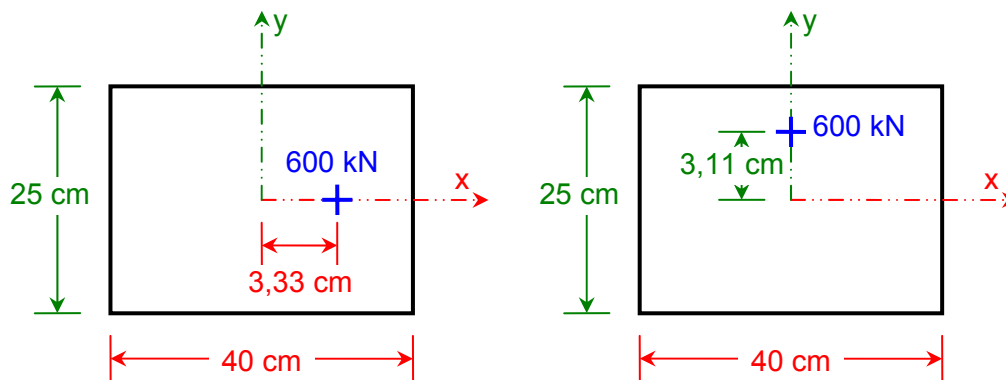
$$\frac{\kappa}{v} = 32 \left(1 + 5 \frac{M_{d,\text{tot}}}{hN_d} \right)$$

$$\frac{\kappa}{v} = 32 \times \left(1 + 5 \times \frac{1866}{25 \times 600} \right) = 51,90$$

$$M_{yd,\text{tot}} = 1866 \text{ kNcm} > 1350 \text{ kNcm OK}$$

$$e_{y,\text{tot}} = \frac{M_{yd,\text{tot}}}{N_d} = \frac{1866}{600} = 3,11 \text{ cm (direção y)}$$

f. Condições de dimensionamento



Observar que, para estas características de pilar, o método do Pilar Padrão com Curvatura Aproximada mostrou-se mais conservador que o método do Pilar Padrão com Rigidez κ Aproximada. O valor de $M_{y_d,tot}$ resultou em 2 430 kNcm para a Curvatura Aproximada (Exemplo 9.7) e em 1 866 kNcm para a Rigidez κ Aproximada.

9.7.2.4 Método do Pilar Padrão para Pilares de Seção Retangular Submetidos à Flexão Composta Obliqua

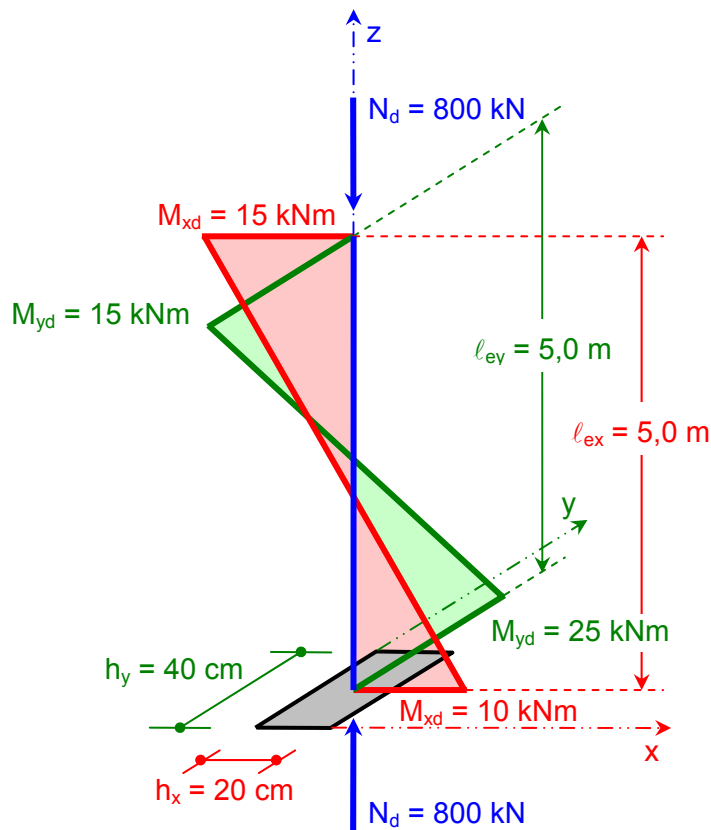
Quando a esbeltez de um pilar de seção retangular submetido à flexão composta oblíqua for menor que 90 ($\lambda < 90$) nas duas direções principais, pode ser aplicado o processo aproximado descrito no item 9.7.2.3 (Pilar Padrão com Rigidez κ Aproximada) simultaneamente em cada uma das duas direções.

A amplificação dos momentos de 1ª ordem em cada direção é diferente pois depende de valores distintos de rigidez e esbeltez.

Uma vez obtida a distribuição de momentos totais, de 1ª e 2ª ordem, em cada direção, deve ser verificada, para cada seção ao longo do eixo, se a composição desses momentos solicitantes fica dentro da envoltória de momentos resistentes para a armadura escolhida. Essa verificação pode ser realizada em apenas três seções: nas extremidades A e B e num ponto intermediário onde se admite atuar concomitantemente os momentos $M_{d,tot}$ nas duas direções (x e y)

Exemplo 9.9: Determinar os valores de $M_{x_d,tot}$ e $M_{y_d,tot}$ para o pilar abaixo indicado. Esse pilar, de seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo, tem dimensão igual a 20 cm na direção x e dimensão 40 cm na direção y. Os valores de $M_{d,tot}$, nas duas direções, deverão ser calculados pelo Método do Pilar Padrão para Pilares de Seção Retangular Submetidos à Flexão Composta Obliqua (Método da Rigidez κ Aproximada).

Solução: A solução do problema consiste na aplicação separada (direção x e direção y) do Método do Pilar Padrão com Rigidez κ Aproximada. Os valores λ serão dados pela Equação 9.11 e os valores λ_1 dados pela Equação 9.12, necessários para verificar a necessidade, ou não, de serem considerados efeitos de 2ª ordem. Os valores de $M_{d,tot}$ ficarão definidos pela Equação 9.21. Os valores de $M_{1d,min}$ serão definidos pela Equação 9.7.



a. Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$h_x = 20 \text{ cm (direção x)}$$

$$h_y = 40 \text{ cm (direção y)}$$

$$l_{ex} = 5,0 \text{ m} = 500 \text{ cm (direção x)}$$

$$l_{ey} = 5,0 \text{ m} = 500 \text{ cm (direção y)}$$

$$N_d = 800 \text{ kN}$$

$$M_{1xd,A} = 15 \text{ kNm} = 1500 \text{ kNcm (plano xz)}$$

$$M_{1xd,B} = 10 \text{ kNm} = 1000 \text{ kNcm (plano xz)}$$

$$M_{1xd,min} = N_d(0,015 + 0,03h_x)$$

$$M_{1xd,min} = 800 \times [0,015 + (0,03 \times 0,20)] = 16,8 \text{ kNm} = 1680 \text{ kNcm}$$

$$M_{1yd,A} = 25 \text{ kNm} = 25000 \text{ kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,B} = 15 \text{ kNm} = 1500 \text{ kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,min} = N_d(0,015 + 0,03h_y)$$

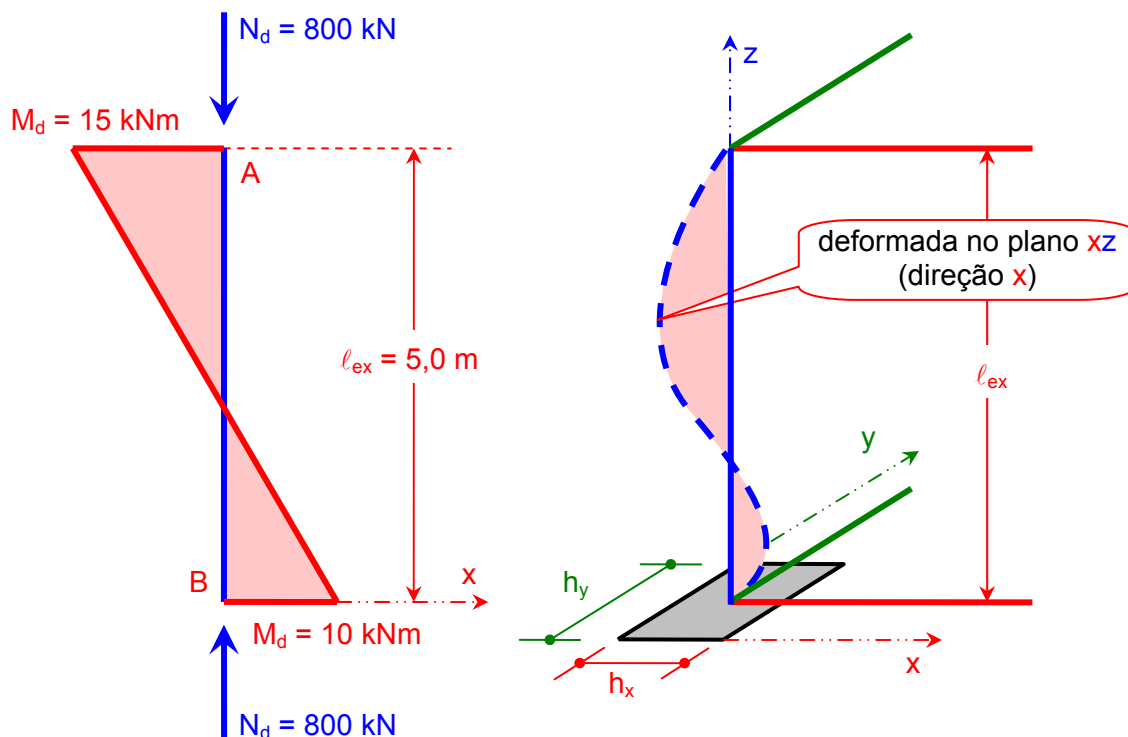
$$M_{1yd,min} = 800 \times [0,015 + (0,03 \times 0,40)] = 21,6 \text{ kNm} = 2160 \text{ kNcm}$$

b. Determinação de λ_x e λ_y (ver Exemplo 9.5)

$$\lambda_x = 3,46 \frac{l_{ex}}{h_x} = 3,46 \times \frac{500}{20} = 86,5 \text{ (direção x)}$$

$$\lambda_y = 3,46 \frac{l_{ey}}{h_y} = 3,46 \times \frac{500}{40} = 43,3 \text{ (direção y)}$$

c. Consideração dos momentos atuando no plano xz (direção x)



$$M_{1xd,A} = 15 \text{ kNm} = 1500 \text{ kNcm} \text{ (plano xz)}$$

$$M_{1xd,B} = 10 \text{ kNm} = 1000 \text{ kNcm} \text{ (plano xz)}$$

$$M_{1xd,min} = 16,8 \text{ kNm} = 1680 \text{ kNcm}$$

c.1. Determinação de λ_1 na direção x

$$\underbrace{M_{1xd,A}}_{15 \text{ kNm}} < \underbrace{M_{1xd,min}}_{16,8 \text{ kNm}} \Rightarrow \alpha_{bx} = 1,0 \text{ (item 9.7.1-a.2)}$$

$$e_{1x} = e_{1x,A} = \frac{M_{1xd,A}}{N_d} = \frac{1500}{800} = 1,88 \text{ cm}$$

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + 12,5 \frac{e_{1x}}{h_x}}{\alpha_{bx}} \begin{cases} \geq 35 \\ \leq 90 \end{cases}$$

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + \left(12,5 \times \frac{1,88}{20,0}\right)}{1,00} = 26,18 \begin{cases} \geq 35 \\ \leq 90 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{1x} = 35,0 \text{ (direção x)}$$

$$\underbrace{\lambda_x}_{86,5} > \underbrace{\lambda_{1x}}_{35,0} \Rightarrow \text{considerar efeitos de 2ª ordem}$$

c.2. Determinação do momento total na direção x

$$\underbrace{M_{1xd,A}}_{15 \text{ kNm}} < \underbrace{M_{1xd,min}}_{16,8 \text{ kNm}} \Rightarrow M_{1xd,A} = 16,8 \text{ kNm} = 1680 \text{ kNcm}$$

$$\alpha_{bx} = 1,0$$

$$\lambda_x = 86,5$$

$$h_x = 20 \text{ cm}$$

$$N_d = 800 \text{ kN}$$

$$b = 0,2hN_d - \frac{\lambda^2 hN_d}{19200} - \alpha_b M_{1d,A}$$

$$b = 0,2 \times 20 \times 800 - \frac{86,5^2 \times 20 \times 800}{19200} - 1,0 \times 1680 = -4715,208$$

$$c = -0,2\alpha_b M_{1d,A} hN_d$$

$$c = -0,2 \times 1,0 \times 1680 \times 20 \times 800 = -5376000$$

$$M_{d,tot} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$M_{d,tot} = \frac{-(-4715,208) + \sqrt{(-4715,208)^2 - 4 \times (-5376000)}}{2} = 5664 \text{ kNcm}$$

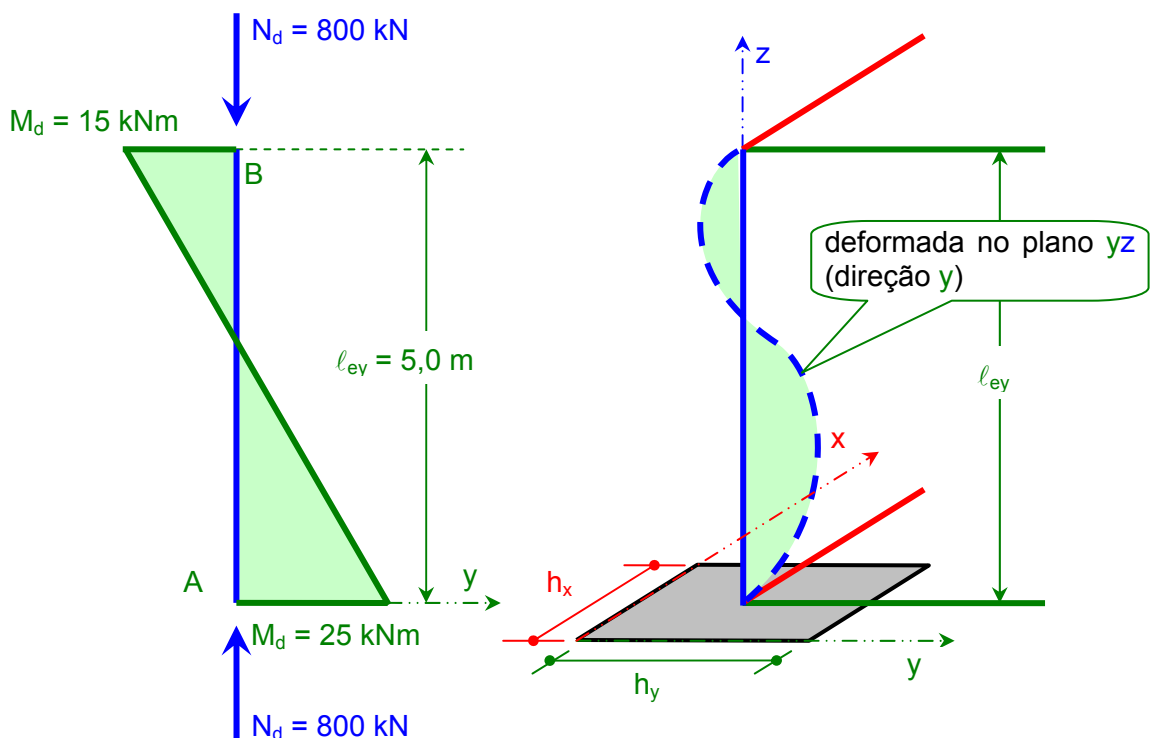
$$\frac{\kappa}{v} = 32 \left(1 + 5 \frac{M_{d,tot}}{hN_d} \right)$$

$$\frac{\kappa}{v} = 32 \times \left(1 + 5 \times \frac{5664}{20 \times 800} \right) = 88,64$$

$$M_{xd,tot} = 5664 \text{ kNcm} > 1680 \text{ kNcm OK}$$

$$e_{x,tot} = \frac{M_{xd,tot}}{N_d} = \frac{5664}{800} = 7,08 \text{ cm (direção x)}$$

d. Consideração dos momentos atuando no plano yz (direção y)



$$M_{1yd,A} = 25 \text{ kNm} = 25000 \text{ kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,B} = 15 \text{ kNm} = 1500 \text{ kNcm (plano yz)}$$

$$M_{1yd,min} = 21,6 \text{ kNm} = 2160 \text{ kNcm}$$

d.1. Determinação de λ_1 na direção y

$$\underbrace{M_{1yd,A}}_{25 \text{ kNm}} > \underbrace{M_{1yd,min}}_{21,6 \text{ kNm}} \Rightarrow \alpha_{by} < 1,0$$

$$e_{1y} = e_{1y,A} = \frac{M_{1yd,A}}{N_d} = \frac{2500}{800} = 3,13 \text{ cm}$$

$$\alpha_{by} = 0,60 - 0,40 \frac{|M_{1yd,B}|}{|M_{1yd,A}|} \geq 0,40 \quad (\text{item 9.7.1-a.2})$$

$$\alpha_{by} = 0,60 - 0,40 \times \frac{1500}{2500} = 0,36 < 0,40 \Rightarrow \alpha_{by} = 0,40 \quad (\text{direção } y)$$

$$\lambda_{1y} = \frac{25 + \left(12,5 \times \frac{3,13}{40,0}\right)}{0,40} = 64,9 \quad \left. \begin{array}{l} \geq 35 \\ \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_{1y} = 64,9 \quad (\text{direção } y)$$

$$\lambda_y < \lambda_{1y} \Rightarrow \text{não considerar efeitos de 2ª ordem}$$

$\lambda_y = 43,3 \quad \lambda_{1y} = 64,9$

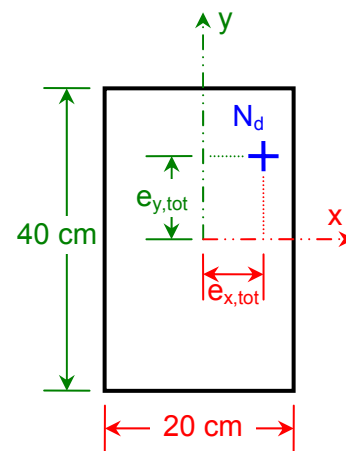
$$M_{1yd,A} > M_{1yd,min} \Rightarrow M_{yd,tot} = M_{1yd,A} = 2500 \text{ kNm}$$

$25 \text{ kNm} \quad 21,6 \text{ kNm}$

$$e_{y,tot} = \frac{M_{yd,tot}}{N_d} = \frac{2500}{800} = 3,13 \text{ cm} \quad (\text{direção } y)$$

e. Condições de dimensionamento

$N_d = 800 \text{ kN}$	M_{xd} kNm	M_{yd} kNm	$e_{x,tot}$ cm	$e_{y,tot}$ cm
Topo	16,80	21,60	2,10	2,70
Intermediária	56,64	25,00	7,08	3,13
Base	16,80	25,00	2,10	3,13



Observar que os sinais dos momentos fletores (sinais das excentricidades) não foram considerados na tabela acima. Isto se deve ao fato da obrigatoriedade do pilar ter seção constante, ser simétrico na geometria e na distribuição de armadura. Desta forma o par de excentricidades pode atuar em qualquer quadrante que, devido às simetrias, o resultado do dimensionamento da armadura será sempre o mesmo.

Por outro lado, a ABNT NBR 6118 solicita que o dimensionamento da armadura seja feito em três seções distintas: topo, intermediária e base. Neste caso o dimensionamento poderá ser feito somente para a seção intermediária porque as excentricidades, **simultaneamente**, são maiores que nas demais seções. Na direção x, 7,08 da **intermediária** > 2,10 do topo e da base. Na direção y, 3,13 da **intermediária** = 3,13 da base > 2,70 do topo. Como as excentricidades maiores ocorrem simultaneamente na seção intermediária, basta fazer o dimensionamento para esta seção.

9.8 Dimensionamento de Pilares - ELU

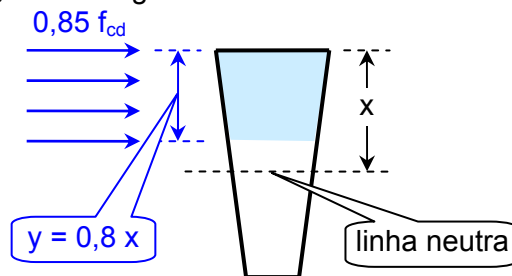
9.8.1 Hipóteses Básicas

Na análise dos esforços resistentes de uma seção de pilar, devem ser consideradas as seguintes hipóteses básicas (ABNT NBR 6118, item 17.2.2):

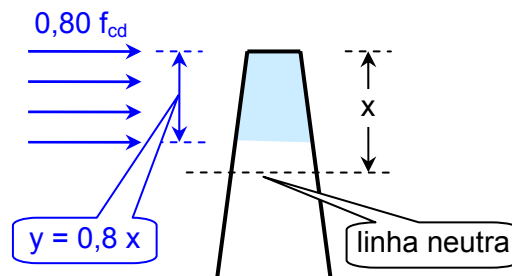
- as seções transversais se mantêm planas após deformação;
- a deformação das barras aderentes, em tração ou compressão, deve ser a mesma do concreto em seu contorno;
- as tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, podem ser desprezadas, obrigatoriamente no ELU;
- a distribuição de tensões no concreto se faz de acordo com o diagrama parábola-retângulo, definido em [4.1], com tensão de pico igual a $0,85 f_{cd}$, com f_{cd}

definido em [3.8.2.2]. Esse diagrama pode ser substituído pelo retângulo de altura $0,8 x$ (onde x é a profundidade da linha neutra), com a seguinte tensão:

- $0,85 f_{cd}$ no caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida;



- $0,80 f_{cd}$ no caso contrário;



- a tensão nas armaduras deve ser obtida a partir dos diagramas tensão-deformação, com valores de cálculo, definidos em [3.8.2.3] e [4.2.2]; e
- o estado limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios definidos na Figura 9.13.

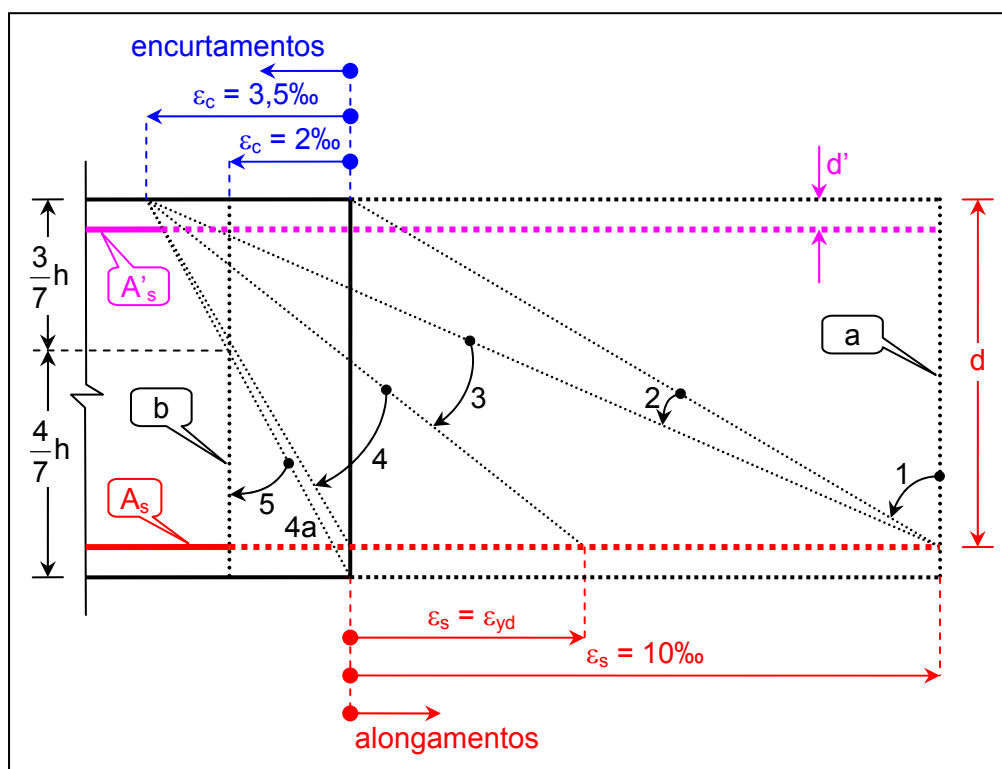


Figura 9.13 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal

Deve ser observado que a reta a e o domínio 1 (tração uniforme e tração não uniforme) só é aplicável aos tirantes de concreto armado. No entanto, os ábacos usados para a resolução de pilares (Figura 9.16), normalmente englobam a solução para tirantes.

9.8.2 Valores Limites para Armaduras Longitudinais de Pilares¹

9.8.2.1 Valores Mínimos

Conforme especifica a ABNT NBR 6118, item 17.3.5.3.1, a armadura longitudinal mínima deve ser:

$$A_{s,\min} = \max \begin{bmatrix} 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \\ 0,4\% A_c \end{bmatrix} \quad \text{Equação 9.22}$$

9.8.2.2 Valores Máximos

Conforme especifica a ABNT NBR 6118, item 17.3.5.3.2, a maior armadura possível em pilares deve ser 8% da seção real, considerando-se inclusive a sobreposição de armadura existente em regiões de emenda (Equação 9.23), respeitado o disposto em 9.10.1.2.

$$A_{s,\max} = 8,0\% A_c \quad \text{Equação 9.23}$$

Devido ao processo construtivo, a grande maioria dos pilares é executada por etapas (pisos) de tal forma que de um piso para o outro sejam necessárias armaduras de emenda (armaduras de espera). Isto fará com que na região de emenda venha a ocorrer uma região de sobreposição de armaduras, cuja taxa de armadura total A_s/A_c (espera mais armadura calculada) deva ficar limitada a 8,0%. Desta forma, quando do cálculo da armadura longitudinal de pilares com emendas, no seu dimensionamento, e já prevendo as esperas, deve-se limitar a taxa de armadura calculada a 4,0% (4% para a armadura calculada mais 4% para as esperas).

9.8.3 Condições de Segurança

Para uma condição geral de solicitação normal de uma seção transversal de concreto armado, valem as notações mostradas na Figura 9.14.

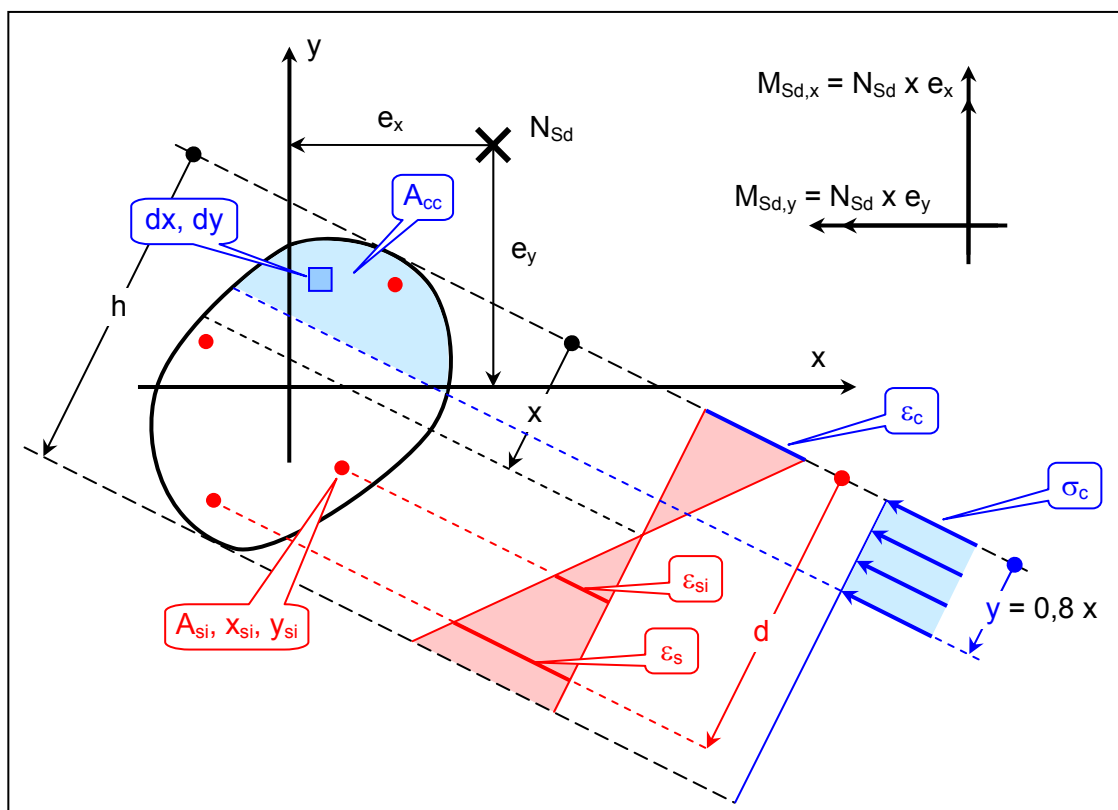


Figura 9.14 – Seção de concreto armado submetida a flexão oblíqua

¹ O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 17.3.4.3 da ABNT NBR 6118.

Definindo as solicitações de cálculo como N_{Sd} , $M_{Sd,x}$ e $M_{Sd,y}$ de tal forma que:

$$M_{Sd,x} = N_{Sd} \times e_x$$

momento em torno do eixo x
positivo para N_{Sd} de compressão e $e_x > 0$

Equação 9.24

$$M_{Sd,y} = N_{Sd} \times e_y$$

momento em torno do eixo y
positivo para N_{Sd} de compressão e $e_y > 0$

a condição de segurança (estado limite último) resulta:

$$S(N_{Sd}, M_{Sd,x}, M_{Sd,y}) \leq R(N_{Rd}, M_{Rd,x}, M_{Rd,y}) \left\{ \begin{array}{l} N_{Sd} \leq N_{Rd} \\ M_{Sd,x} \leq M_{Rd,x} \\ M_{Sd,y} \leq M_{Rd,y} \end{array} \right.$$

Equação 9.25

com:

$$N_{Rd} = \iint_{ACC} \sigma_c dx dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si}$$

$$M_{Rd,x} = N_{Rd} \times e_x = \iint_{ACC} \sigma_c x dx dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} x_{si}$$

Equação 9.26

$$M_{Rd,y} = N_{Rd} \times e_y = \iint_{ACC} \sigma_c y dx dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} y_{si}$$

A resolução da Equação 9.26 conduz a uma superfície de interação, como mostrado na Figura 9.15.

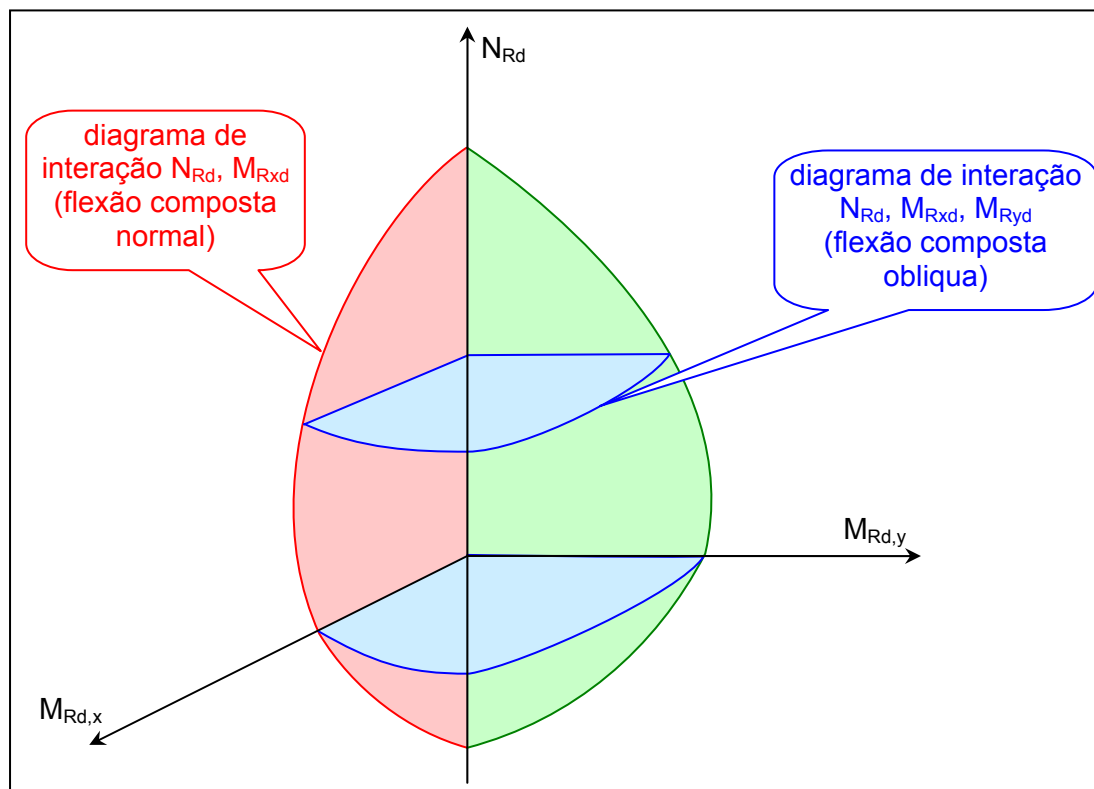


Figura 9.15 – Superfície de interação

Os diagramas de interação mais usados para dimensionamento de pilares são os desenvolvidos pela Escola de Engenharia de São Carlos - USP, especificamente:

- Dimensionamento de Peças Retangulares de Concreto Armado Solicitadas à Flexão Reta, de W. S. Venturini, 1987; e
- Ábacos para Flexão Obliqua, de L. M. Pinheiro, L. T. Baraldi e M. E. Porem, 1994.

Dentre os programas computacionais desenvolvidos para o dimensionamento de pilares podem ser destacados os desenvolvidos por M. F. F. de Oliveira e C. A. W. Zandona, CESEC – UFPR, 2001, a saber¹:

- Normal 1.3 – Flexão Composta Reta; e
- Obliqua 1.0 – Flexão Composta Obliqua.

Os ábacos apresentados por Venturini, para flexão normal composta, tem o aspecto mostrado na Figura 9.16, onde:

- a posição 1 representa uma seção dimensionada com segurança, porém com excesso de material (concreto ou aço);
- a posição 2 corresponde à condição limite de segurança, sem excesso de material; e
- a posição 3 corresponde a uma seção fora dos limites de segurança, devendo ser alterada em suas dimensões ou na quantidade de armadura.

Os ábacos e programas computacionais referidos preferem não fazer distinção entre valores correspondentes a solicitações e a valores de resistência. Os valores apresentados nos ábacos e programas usam, para força normal e momentos fletores, as expressões de cálculo N_d , M_{xd} e M_{yd} , no lugar de N_{Rd} , $M_{Rd,x}$ e $M_{Rd,y}$, respectivamente.

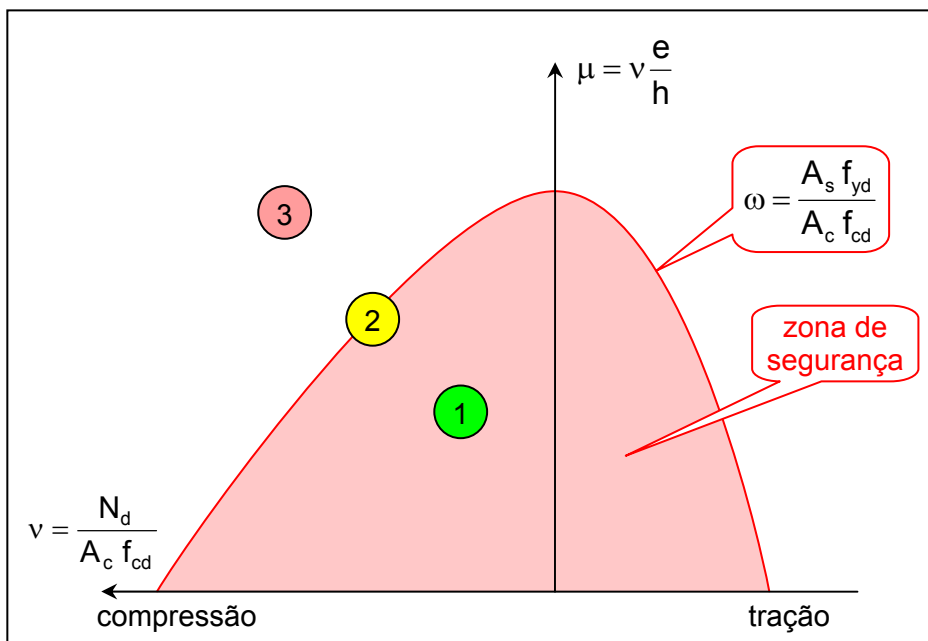


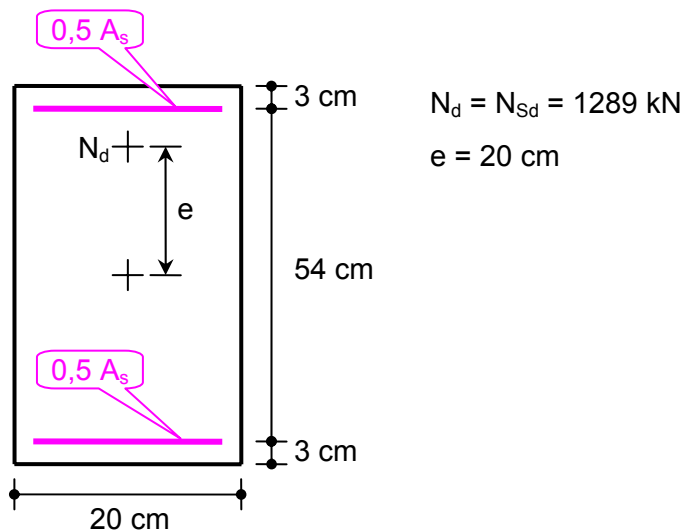
Figura 9.16 – Ábaco para flexão normal composta

Exemplo 9.10: Determinar a armadura para a seção transversal de um pilar submetido ao carregamento abaixo indicado.

Considerar:

- estado limite último – combinação normal de carregamento;
- concreto: C25; e
- aço: CA-50.

¹ Acesso aos programas pelo www.cesec.ufpr.br/concretoarmado.



Solução: A solução do problema consiste na aplicação direta do ábaco A-1 apresentado em Dimensionamento de Peças Retangulares de Concreto Armado Solicitadas à Flexão Reta, W. S. Venturini, EESC/USP. A armadura mínima deve ser verificada pela Equação 9.22 e a armadura máxima com a Equação 9.23.

a. Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{25}{1,4} = 17,9 \text{ MPa} = 1,79 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$h = 60 \text{ cm}$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$d' = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{3}{60} = 0,05$$

$$A_c = b \times h = 20 \times 60 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,\min} = \max \left[\begin{array}{l} 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \\ 0,4\% A_c \end{array} \right]$$

$$A_{s,\min} = \max \left[\begin{array}{l} 0,15 \times \frac{1289}{43,5} = 4,44 \text{ cm}^2 \\ \frac{0,4}{100} \times 1200 = 4,80 \text{ cm}^2 \end{array} \right] = 4,80 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,\max} = 4,0\% A_c \text{ (admitido região de emendas)}$$

$$A_{s,\max} = \frac{4,0}{100} \times 1200 = 48,0 \text{ cm}^2$$

$$N_d = N_{Sd} = 1289 \text{ kN}$$

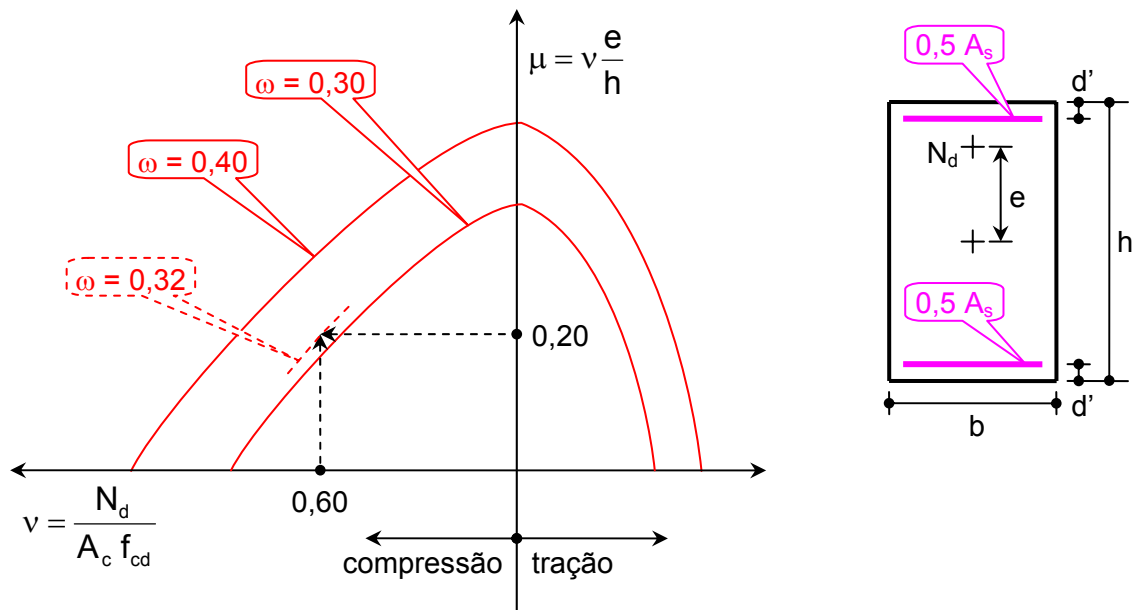
$$e = 20 \text{ cm}$$

b. Coeficientes ν e μ

$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} = \frac{1289}{1200 \times 1,79} = 0,60$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}} = \frac{N_d \times e}{A_c h f_{cd}} = v \frac{e}{h} = 0,60 \times \frac{20}{60} = 0,20$$

- c. Coeficiente ω e determinação de A_s
 Utilizando o ábaco A-1, obtém-se $\omega = 0,32$



$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

$$0,32 = \frac{A_s \times 43,5}{1200 \times 1,79} \Rightarrow A_s = 15,80 \text{ cm}^2 \quad (8 \phi 16 \text{ mm} = 16,08 \text{ cm}^2)$$

$$A_s = 16,08 \text{ cm}^2 \left\{ \begin{array}{l} > 4,80 \text{ cm}^2 \\ < 48,0 \text{ cm}^2 \end{array} \right. \text{ OK}$$

- d. Verificação da outra direção

$$b = 60 \text{ cm}$$

$$h = 20 \text{ cm}$$

$$d' = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{3}{20} = 0,15$$

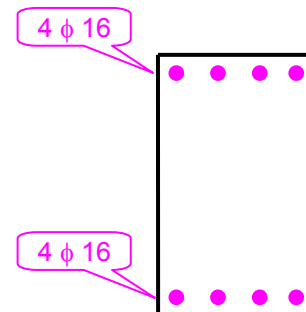
$$A_c = b \times h = 60 \times 20 = 1200 \text{ cm}^2$$

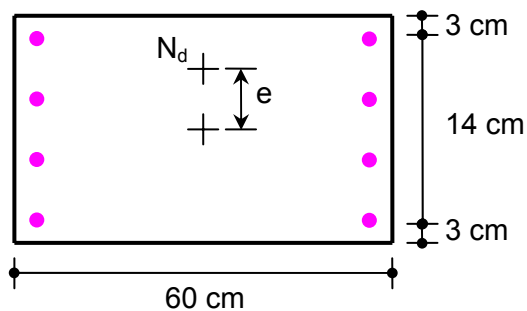
$$A_{s,\min} = 4,80 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,\max} = 48,0 \text{ cm}^2$$

$$N_d = N_{Sd} = 1289 \text{ kN}$$

$$e = e_{1d,\min} = 0,015 + 0,03h = 0,015 + (0,03 \times 2) = 0,021 \text{ m} = 2,1 \text{ cm}$$





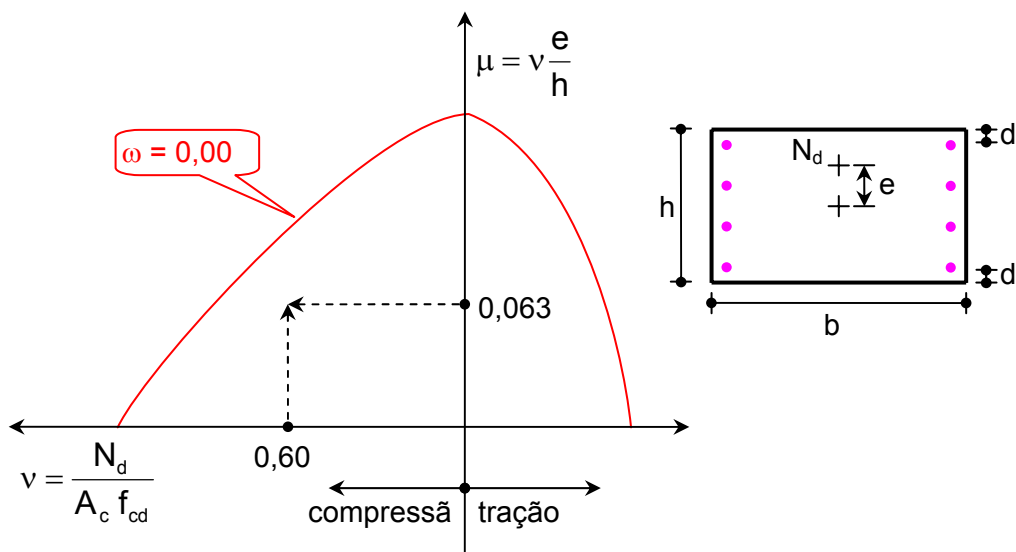
$$N_d = 1289 \text{ kN}$$

$$e = 2,1 \text{ cm}$$

$$v = 0,60$$

$$\mu = v \frac{e}{h} = 0,60 \times \frac{2,1}{20} = 0,063$$

Utilizando o ábaco A-12, obtém-se $\omega = 0,00$



Como o ω calculado pela segunda verificação (0,00) resultou inferior ao ω da primeira verificação (0,32), prevalece a solução $\omega = 0,32$ (8 ϕ 16 mm).

Os ábacos apresentados por Pinheiro, Baraldi e Porem, para flexão oblíqua composta, tem o aspecto mostrado na Figura 9.17, onde:

- a posição 1 representa uma seção dimensionada com segurança, porém com excesso de material (concreto ou aço);
- a posição 2 corresponde à condição limite de segurança, sem excesso de material; e
- a posição 3 corresponde a uma seção fora dos limites de segurança, devendo ser alterada em suas dimensões ou na quantidade de armadura.

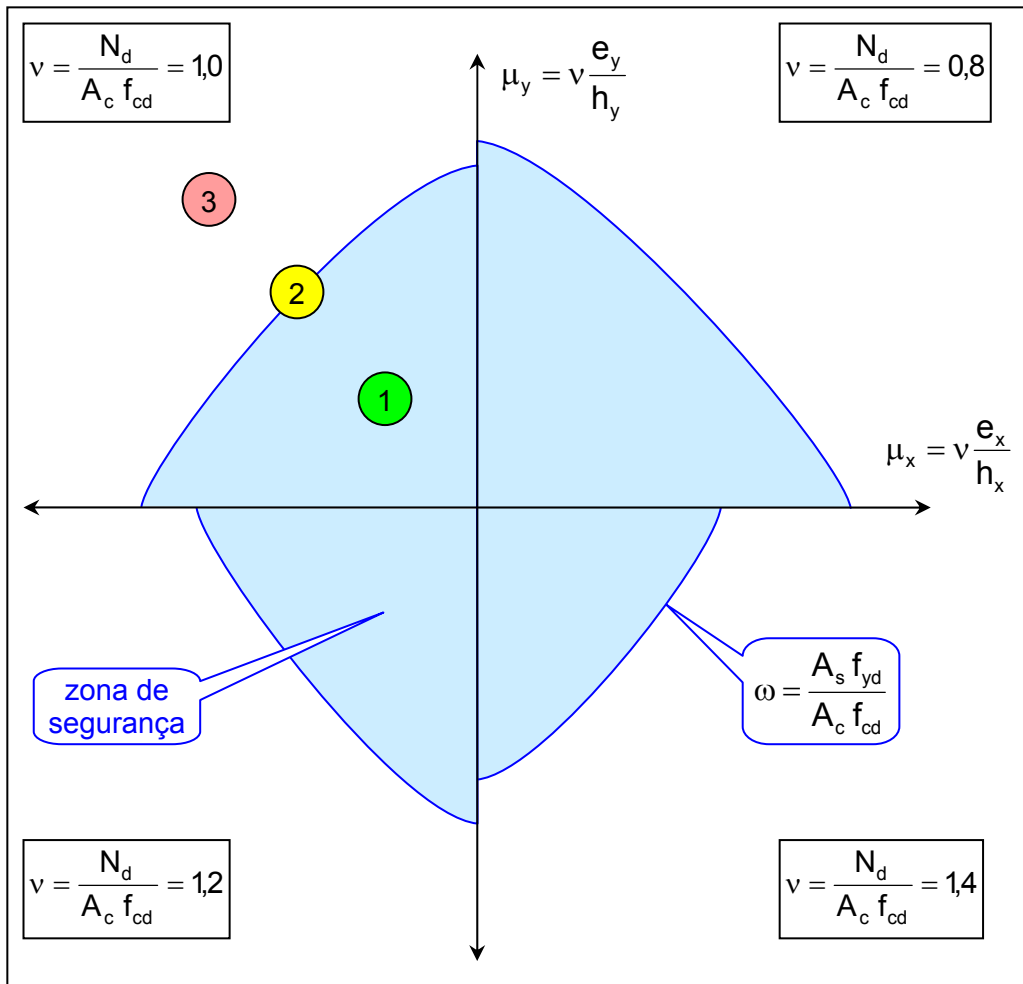
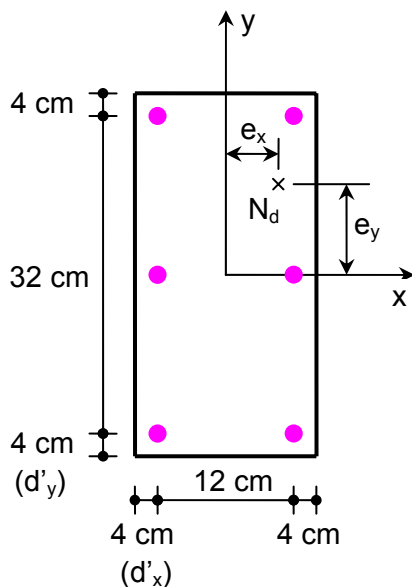


Figura 9.17 – Ábaco para flexão oblíqua composta

Exemplo 9.11: Determinar a armadura para a seção transversal de um pilar submetido ao carregamento abaixo indicado.

Considerar:

- estado limite último – combinação normal de carregamento;
- concreto: C25; e
- aço: CA-50.



$N_d = 573 \text{ kN (} N_{Sd} \text{)}$
 $e_x = 5 \text{ cm}$
 $e_y = 15 \text{ cm}$
 $h_x = 20 \text{ cm}$
 $h_y = 40 \text{ cm}$
 $d'_x = 4 \text{ cm (} 0,20 h_x \text{)}$
 $d'_y = 4 \text{ cm (} 0,10 h_y \text{)}$

Solução: A solução do problema consiste na aplicação direta do ábaco A-51 apresentado em *Ábacos para Flexão Obliqua*, L. M. Pinheiro, L. T. Baraldi e M. E. Porem, EESC/USP. A armadura mínima deve ser verificada pela Equação 9.22 e a armadura máxima com a Equação 9.23.

a. Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{25}{1,4} = 17,9 \text{ MPa} = 1,79 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$h_x = 20 \text{ cm}$$

$$h_y = 40 \text{ cm}$$

$$d'_x = 4 \text{ cm} (0,20 h_x)$$

$$d'_y = 4 \text{ cm} (0,10 h_y)$$

$$A_c = h_x \times h_y = 20 \times 40 = 800 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,\min} = \max \left[\begin{array}{l} 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \\ 0,4\% A_c \end{array} \right]$$

$$A_{s,\min} = \max \left[\begin{array}{l} 0,15 \times \frac{573}{43,5} = 1,98 \text{ cm}^2 \\ \frac{0,4}{100} \times 800 = 3,20 \text{ cm}^2 \end{array} \right] = 3,20 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,\max} = 4,0\% A_c \text{ (admitido região de emendas)}$$

$$A_{s,\max} = \frac{4,0}{100} \times 800 = 32,0 \text{ cm}^2$$

$$N_d = N_{Sd} = 573 \text{ kN}$$

$$e_x = 5 \text{ cm}$$

$$e_y = 15 \text{ cm}$$

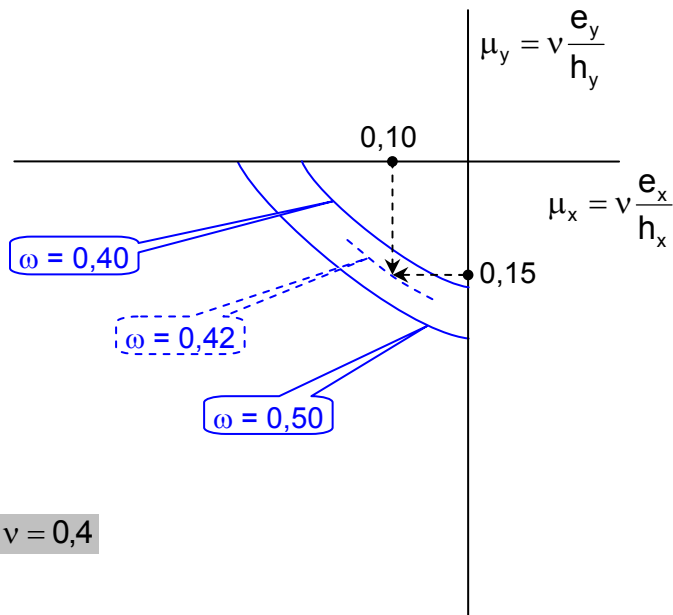
b. Coeficientes v e μ_x e μ_y

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} = \frac{573}{800 \times 1,79} = 0,40$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c f_{cd} h_x} = \frac{N_d \times e_x}{A_c f_{cd} h_x} = v \frac{e_x}{h_x} = 0,40 \times \frac{5}{20} = 0,10$$

$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c f_{cd} h_y} = \frac{N_d \times e_y}{A_c f_{cd} h_y} = v \frac{e_y}{h_y} = 0,40 \times \frac{15}{40} = 0,15$$

- c. Coeficiente ω e determinação de A_s
 Utilizando o ábaco A-51, obtém-se $\omega = 0,42$

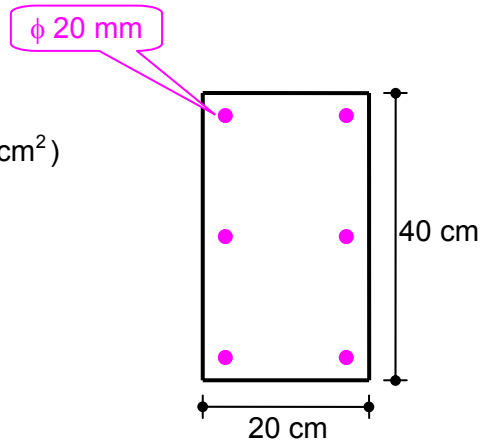
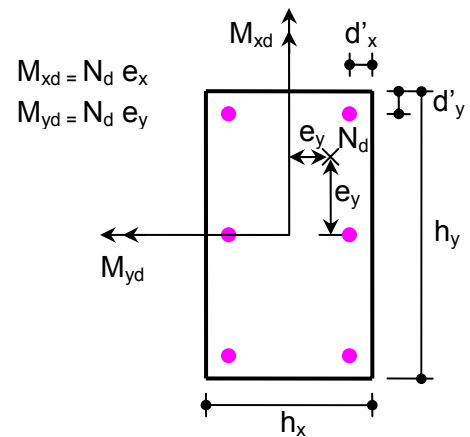


$$v = 0,4$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

$$0,42 = \frac{A_s \times 43,5}{800 \times 1,79} \Rightarrow A_s = 13,83 \text{ cm}^2 \text{ (6 } \phi 20 \text{ mm} = 18,84 \text{ cm}^2)$$

$$A_s = 18,84 \text{ cm}^2 \begin{cases} > 3,20 \text{ cm}^2 \\ < 32,0 \text{ cm}^2 \end{cases} \quad \text{OK}$$



9.9 Análise de Estruturas de Nós Móveis¹

Na análise estrutural de estruturas de nós móveis devem ser obrigatoriamente considerados os efeitos da não-linearidade geométrica e da não-linearidade física e, portanto, no dimensionamento, devem ser obrigatoriamente considerados os efeitos globais e locais de 2ª ordem.

9.9.1 Análise Não-Linear com 2ª Ordem

Uma solução aproximada para a determinação dos esforços globais de 2ª ordem, consiste na avaliação dos esforços finais (1ª ordem + 2ª ordem) a partir da majoração adicional dos esforços horizontais da combinação de carregamento considerada por $0,95 \gamma_z$. Esse processo só é válido para $\gamma_z \leq 1,3$.

9.9.2 Consideração Aproximada da Não-Linearidade Física

Para a análise dos esforços globais de 2ª ordem, em estruturas reticuladas com no mínimo quatro andares, pode ser considerada a não-linearidade física de maneira aproximada, tomando-se como rigidez dos elementos estruturais os valores seguintes:

¹ O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 15.7 da ABNT NBR 6118.

$$\text{lajes: } (EI)_{\text{sec}} = 0,3E_{\text{ci}} I_c$$

$$\text{vigas: } \begin{cases} (EI)_{\text{sec}} = 0,4E_{\text{ci}} I_c & \langle A'_s \neq A_s \rangle \\ (EI)_{\text{sec}} = 0,5E_{\text{ci}} I_c & \langle A'_s = A_s \rangle \end{cases} \quad \text{Equação 9.27}$$

$$\text{pilares: } (EI)_{\text{sec}} = 0,8E_{\text{ci}} I_c$$

onde:

I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto, incluindo, quando for o caso, as mesas colaborantes.

Quando a estrutura de contraventamento for composta exclusivamente por vigas e pilares e γ_z for menor que 1,3, permite-se calcular a rigidez das vigas e pilares por:

$$(EI)_{\text{sec}} = 0,7E_{\text{ci}} I_c \quad \text{Equação 9.28}$$

Os valores de rigidez adotados neste item são aproximados e não podem ser usados para avaliar esforços locais de 2ª ordem, mesmo com uma discretização maior da modelagem.

9.9.3 Análise dos Efeitos Locais de 2ª Ordem

A análise global de 2ª ordem fornece apenas os esforços nas extremidades das barras, devendo ser realizada uma análise dos efeitos locais de 2ª ordem ao longo dos eixos das barras comprimidas, de acordo com o prescrito em 9.7.

Os elementos isolados, para fins de verificação local, devem ser formados pelas barras comprimidas retiradas da estrutura, com comprimento ℓ_e , de acordo com o estabelecido em 9.6, porém aplicando-se às suas extremidades os esforços obtidos através da análise global de 2ª ordem.

9.10 Disposições Construtivas¹

As exigências que seguem referem-se a pilares cuja maior dimensão da seção transversal não exceda cinco vezes a menor dimensão, e não são válidas para as regiões especiais².

9.10.1 Armaduras Longitudinais

9.10.1.1 Diâmetro Mínimo e Taxa de Armadura

O diâmetro das barras longitudinais não deve ser inferior a 10 mm e nem superior 1/8 da menor dimensão transversal.

A taxa geométrica de armadura deve respeitar os valores máximos e mínimos especificados em 9.8.2.

9.10.1.2 Distribuição transversal

As armaduras longitudinais devem ser dispostas na seção transversal de forma a garantir a adequada resistência do elemento estrutural. Em seções poligonais, deve existir pelo menos uma barra em cada vértice; em seções circulares, no mínimo seis barras distribuídas ao longo do perímetro.

O espaçamento livre entre as armaduras, medido no plano da seção transversal, fora da região de emendas, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

- 20 mm;
- diâmetro da barra, do feixe ou da luva; e
- 1,2 vezes o diâmetro máximo do agregado.

Para feixes de barras, deve-se considerar o diâmetro do feixe $\phi_n = \phi n^{1/2}$.

Esses valores aplicam-se também às regiões de emendas por traspasse de barras.

¹ O texto relativo a esta seção é, basicamente, uma cópia do item 18.4 da ABNT NBR 6118

² Seção 21 da ABNT NBR 6118.

Quando estiver previsto no plano de concretagem o adensamento através de abertura lateral na face da forma, o espaçamento das armaduras deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador.

O espaçamento máximo entre eixos das barras, ou de centros de feixes de barras, deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão no trecho considerado, sem exceder 400 mm.

9.10.2 Armaduras transversais

A armadura transversal de pilares, constituída por estribos e, quando for o caso, por grampos suplementares, deve ser colocada em toda a altura do pilar, sendo obrigatória sua colocação na região de cruzamento com vigas e lajes.

O diâmetro dos estribos em pilares não deve ser inferior a 5 mm nem a 1/4 do diâmetro da barra isolada ou do diâmetro equivalente do feixe que constitui a armadura longitudinal.

O espaçamento longitudinal entre estribos, medido na direção do eixo do pilar, para garantir o posicionamento, impedir a flambagem das barras longitudinais e garantir a costura das emendas de barras longitudinais nos pilares usuais, deve ser igual ou inferior ao menor dos seguintes valores:

- 200 mm;
- menor dimensão da seção; e
- 24 ϕ para CA-25, 12 ϕ para CA 50.

Pode ser adotado o valor $\phi_t < \phi/4$ desde que as armaduras sejam constituídas do mesmo tipo de aço e o espaçamento respeite também a limitação

$$s_{\max} = 9000 \left(\frac{\phi_t^2}{\phi} \right) \frac{1}{f_{yk}} \quad (f_{yk} \text{ em MPa})$$

Quando houver necessidade de armaduras transversais para força cortante e momento torçor, esses valores devem ser comparados com o especificado no item 18.3.3.2 da ABNT NBR 6118 para vigas, adotando-se o menor dos limites especificados.

9.11 Simbologia Específica

d	diâmetro da seção transversal de concreto altura útil da viga - distância da fibra de concreto mais comprimida até o centro de gravidade da armadura tracionada
d'	distância da fibra de concreto mais comprimida até o centro de gravidade da armadura comprimida
dx	dimensão infinitesimal de um elemento de concreto comprimido
dy	dimensão infinitesimal de um elemento de concreto comprimido
e	excentricidade
e ₁	excentricidade de 1ª ordem
e _{1,min}	excentricidade de 1ª ordem associada ao momento fletor M _{1d,min}
e _{1x}	excentricidade de 1ª ordem, na direção x
e _{1y}	excentricidade de 1ª ordem, na direção y
e _{tot}	excentricidade referente ao M _{d,tot}
e _x	excentricidade na direção x
e _{x,tot}	excentricidade referente ao M _{xd,tot}
e _y	excentricidade na direção y
e _{y,tot}	excentricidade referente ao M _{yd,tot}
f _{cd}	resistência à compressão do concreto de cálculo
f _{ck}	resistência à compressão do concreto característica
f _{yd}	resistência ao escoamento do aço de cálculo
g	valor da ação permanente
h	altura total da seção transversal altura da seção transversal de pilar na direção considerada
h _x	altura da seção transversal de pilar na direção x
h _y	altura da seção transversal de pilar na direção y
i	raio de giração da seção transversal do pilar
i _x	raio de giração referido á direção x

i_y	raio de giração referido á direção y
l	altura de um lance de pilar
l	distância entre eixos de elementos estruturais aos quais um pilar esteja vinculado
l_0	distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar
l_e	comprimento equivalente de pilar
l_{ex}	comprimento equivalente de pilar na direção x
l_{ey}	comprimento equivalente de pilar na direção y
n	número de níveis de barras horizontais (andares)
	número total de elementos verticais contínuos
q	valor da ação variável
r	raio de curvatura
r_x	raio de curvatura na direção x
r_y	raio de curvatura na direção y
x	altura da linha neutra
	coordenada de um elemento infinitesimal de concreto comprimido
x_{si}	coordenada de uma barra genérica
y	altura da região de tensões constantes no concreto comprimido
	coordenada de um elemento infinitesimal de concreto comprimido
y_{si}	coordenada de uma barra genérica
A_c	área da seção transversal de concreto
A_{cc}	área de concreto comprimido
A'_s	área da seção da armadura longitudinal de compressão
A_s	área da seção transversal da armadura longitudinal de tração
	área da seção transversal da armadura longitudinal de pilar
A_{si}	área da seção transversal da armadura longitudinal de uma barra genérica
E_{ci}	módulo de deformação tangente inicial do concreto
E_{cs}	módulo de deformação secante do concreto
EI	rigidez
F	força
F_d	valor de cálculo das ações
F_{gk}	valor característico das ações permanentes diretas
F_{egk}	valor característico das ações permanentes indiretas
F_k	valor característico das ações
F_{qk}	valor característico das ações variáveis
F_{eqk}	valor característico das ações variáveis indiretas
H	altura total da edificação
H_d	força horizontal de cálculo
H_i	altura de um lance de pilar
H_{tot}	altura total da estrutura, medida a partir do topo da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo
I	momento de inércia
I_c	momento de inércia da seção bruta de concreto
I_x	momento de inércia referido à direção x (I_{yy})
I_y	momento de inércia referido à direção y (I_{xx})
M	momento fletor
M_1	momento de 1ª ordem
$M_{1,tot,d}$	momento de tombamento - soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura
M_{1d}	momento de 1ª ordem de cálculo
$M_{1d,min}$	momento total de 1ª ordem de cálculo mínimo que possibilita o atendimento da verificação das imperfeições localizadas de um lance de pilar
M_{1xd}	momento de 1ª ordem de cálculo na direção x
$M_{1xd,min}$	momento total de 1ª ordem de cálculo mínimo na direção x
M_{1yd}	momento de 1ª ordem de cálculo na direção y
$M_{1yd,min}$	momento total de 1ª ordem de cálculo mínimo na direção y

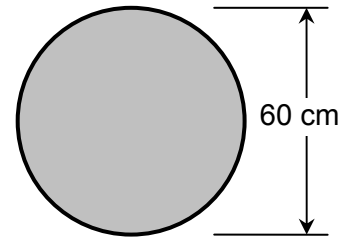
M_2	momento de 2ª ordem
M_{2d}	momento de 2ª ordem de cálculo
M_A	momento de 1ª ordem no extremo do pilar
M_B	momento de 1ª ordem no extremo do pilar
M_C	momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço
M_d	momento fletor de cálculo
$M_{d,tot}$	momento total máximo no pilar
M_{Rd}	momento fletor resistente de cálculo
$M_{Rd,x}$	momento fletor resistente de cálculo na direção x
$M_{Rd,y}$	momento fletor resistente de cálculo na direção y
M_{Sd}	momento fletor solicitante de cálculo
$M_{Sd,x}$	momento fletor solicitante de cálculo na direção x
$M_{Sd,y}$	momento fletor solicitante de cálculo na direção y
$M_{xd,tot}$	momento total máximo no pilar na direção x
$M_{yd,tot}$	momento total máximo no pilar na direção y
N	força normal
N_d	força normal de cálculo
N_k	somatória de todas as cargas verticais atuantes na estrutura (a partir do nível considerado para o cálculo de H_{tot}), com seu valor característico
N_{Rd}	força normal resistente de cálculo
N_{Sd}	força normal solicitante de cálculo
R	resistência
S	solicitação
α	parâmetro de instabilidade
α_b	fator que define as condições de vínculo nos apoios
α_{bx}	fator que define as condições de vínculo nos apoios, na direção x
α_{by}	fator que define as condições de vínculo nos apoios, na direção y
ε_c	deformação específica do concreto
ε_s	deformação específica do aço à tração
ε_{si}	deformação específica do aço de uma barra genérica
ε'_s	deformação específica do aço à compressão
ε_{yd}	deformação específica de escoamento do aço
γ_z	coeficiente de majoração dos esforços globais finais de 1ª ordem para obtenção dos finais de 2ª ordem
κ	rigidez adimensional
$\kappa_{inicial}$	valor inicial da rigidez adimensional
κ_x	rigidez adimensional na direção x
κ_y	rigidez adimensional na direção y
λ	índice de esbeltez
λ_x	índice de esbeltez na direção x
λ_y	índice de esbeltez na direção y
λ_1	valor limite para índice de esbeltez
μ	momento fletor reduzido adimensional
ν	força normal adimensional
θ_a	desaprumo global de uma estrutura
θ_1	desaprumo de um elemento vertical contínuo
	desaprumo de um lance de pilar de altura H_i
σ_c	tensão à compressão no concreto
σ_{si}	tensão na armadura longitudinal de uma barra genérica
ω	taxa mecânica de armadura longitudinal
Δ	deslocamento
$\Delta M_{tot,d}$	soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de 1ª ordem

9.12 Exercícios

Ex. 9.1: Dimensionar e detalhar as armaduras (longitudinal e transversal) para o pilar de seção transversal como abaixo indicado, de altura igual a 7 m (comprimento de flambagem), sujeito a uma carga axial centrada de cálculo (N_d) de 4000 kN.

Considerar:

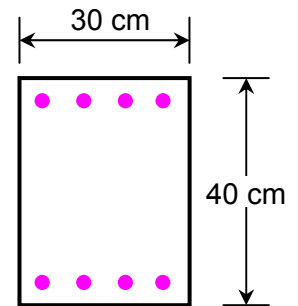
- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C25;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm; e
- diâmetro da armadura longitudinal: 16 mm.



Ex. 9.2 Determinar o diâmetro da armadura para a seção transversal do pilar abaixo representado, de altura igual a 3 m (comprimento de flambagem), sujeito a uma carga axial centrada de cálculo (N_d) de 1716 kN.

Considerar:

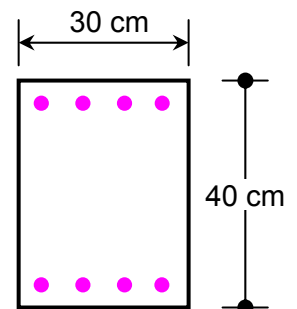
- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm; e
- armadura longitudinal: 8 ϕ .



Ex. 9.3: Determinar a máxima carga axial (N_d) que o pilar, de seção transversal como abaixo representado, pode suportar.

Considerar:

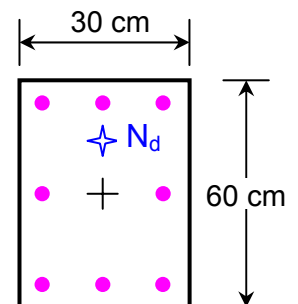
- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm;
- armadura longitudinal: 8 $\phi 12,5$ mm; e
- altura do pilar (comprimento de flambagem): 3 m.



Ex. 9.4: Determinar o diâmetro da armadura para a seção transversal do pilar abaixo representado.

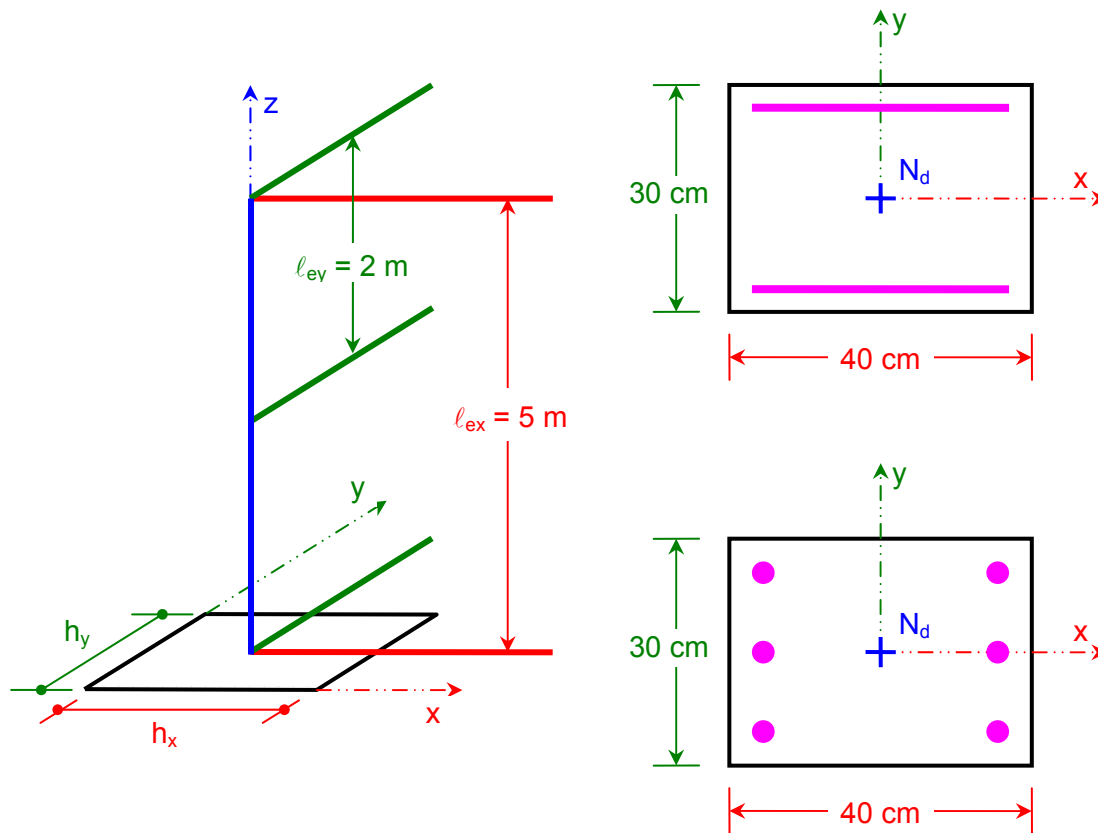
Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm;
- armadura longitudinal: 8 ϕ ;
- altura do pilar (comprimento de flambagem): 4 m;
- carregamento axial (N_d): 2317 kN; e
- excentricidade: 5 cm.



Ex. 9.5: Considerando que as duas seções transversais de pilar, como abaixo representadas, deverão suportar uma mesma força normal centrada de mesma intensidade, pede-se:

- o valor de cálculo desta força normal (N_d); e
- a definição de qual seção deverá possuir a menor taxa de armadura longitudinal.



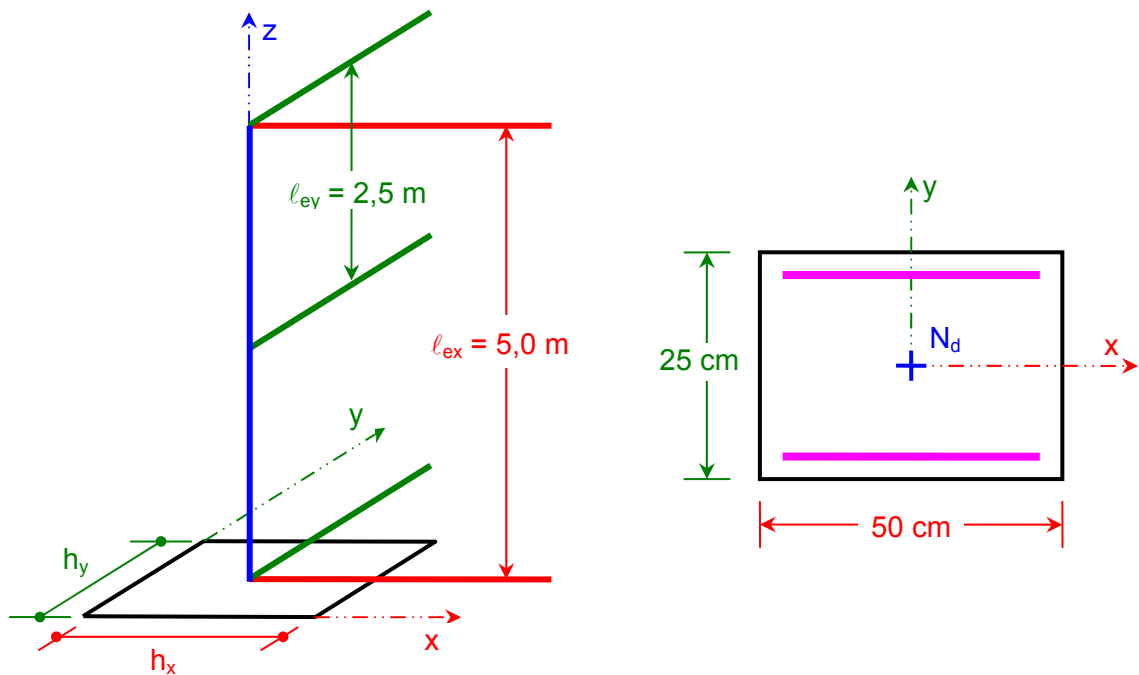
Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 2,5 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm; e
- diâmetro da armadura longitudinal: 16 mm.

Ex. 9.6: Determinar máxima carga axial (N_d) que o pilar, de seção transversal como abaixo representado, pode suportar.

Considerar:

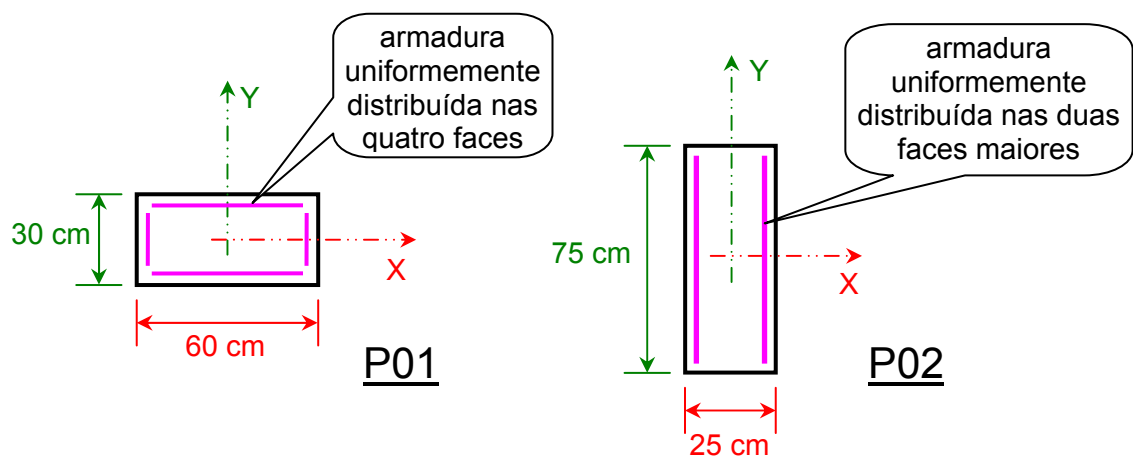
- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm;
- diâmetro da armadura longitudinal: 16 mm; e
- armadura longitudinal (A_s): 20,11 cm².



Ex. 9.7: Os pilares P01 e P02 foram executados com o mesmo tipo de aço e o mesmo concreto e têm as características geométricas indicadas abaixo. Os dois pilares suportam forças normais centradas, sendo a carga do pilar P02 dez por cento maior que a carga do pilar P01. Nestas condições, determinar a armadura necessária para o pilar P02, considerando as distribuições de barras conforme indicadas na figura.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 2,5 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 0,53 mm;
- altura do pilar P01 (comprimento de flambagem): 3,0 m;
- altura do pilar P02 (comprimento de flambagem): 2,5 m;
- taxa de armadura longitudinal (ρ) do pilar P01: 1,75%; e
- carga (N_{Sd}) atuante no pilar P01: 1400 kN (centrada).

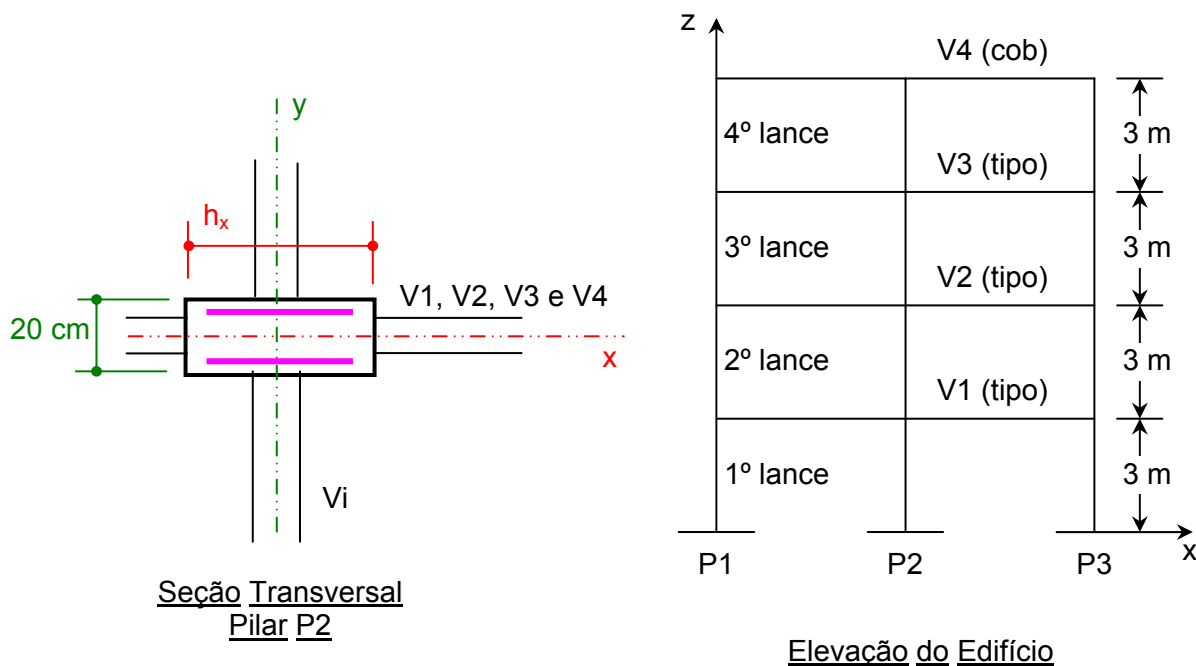


Ex. 9.8: O pilar central P2 de um edifício recebe, em cada nível, as reações de apoio das vigas V1, V2, V3 (pavimento tipo) e V4 (cobertura). Sabendo-se que, em cada lance, o peso próprio do pilar pode ser avaliado como sendo igual a 1% da força normal acumulada atuante no seu topo, pede-se:

- o valor da força normal de cálculo, suposta centrada, atuante no primeiro lance do pilar P2 (carga atuante no pilar situado abaixo da V1);
- o dimensionamento da seção transversal do primeiro lance (definição de h_x), prevendo-se uma taxa geométrica de armadura em torno de 2%; e
- o dimensionamento da armadura para a carga estabelecida no item a, com h_x definido no item b.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50; e
- reações das vigas:
 - V4: 300 kN (valor característico);
 - V1 = V2 = V3: 400 kN (valor característico).



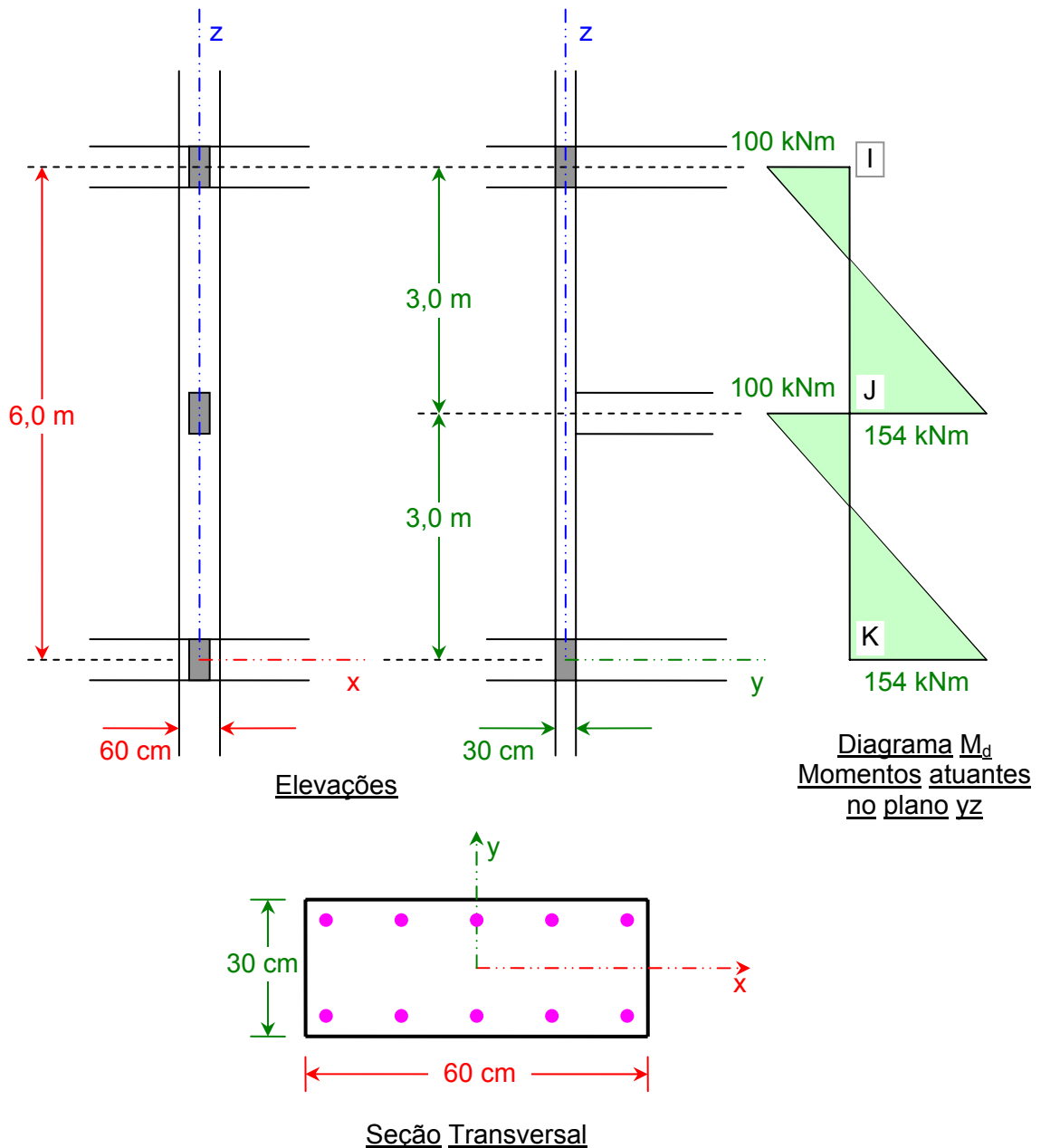
Obs:

- admitir $d'_x/h_x = 0,10$ e $d'_y/h_y = 0,20$;
- edifício constituído por pavimento térreo, três pavimentos tipo (onde atuam as vigas V1, V2 e V3) e cobertura (onde atua a viga V4);
- largura do pilar h_x como múltiplo de 5 cm; e
- armadura longitudinal do pilar colocada paralelamente ao lado h_x (metade para cada lado).

Ex. 9.9: Determinar o diâmetro mínimo (ϕ) para as barras do pilar abaixo representado. O pilar deverá ser constituído por dez barras longitudinais dispostas, cinco a cinco, paralelamente ao lado maior.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20 ($\gamma_c = 1,40$);
- aço: CA-50 ($\gamma_s = 1,15$);
- N_d : 2053 kN (compressão ao longo do eixo z); e
- $d'/h = 0,10$ (nas duas direções).



Obs:

- o eixo z da figura corresponde à altura do pilar e o plano xy contém a seção transversal do mesmo;
- efetuar o cálculo da armadura (determinação obrigatória dos valores de A_s) considerando, isoladamente, as duas direções; e
- nas considerações envolvendo a posição J, os momentos fletores atuantes no pilar (plano yz) não deverão ser somados.

Ex. 9.10: Determinar o menor valor possível para h_x (valor múltiplo de 5 cm) de tal forma que o pilar abaixo representado possa resistir a uma força normal suposta centrada de cálculo (N_d) igual 5105 kN. Este pilar, componente de uma estrutura de 5 pavimentos, será construído por etapas (por pisos) o que vale dizer que na sua região inferior as armaduras serão emendadas (emendas por traspasse).

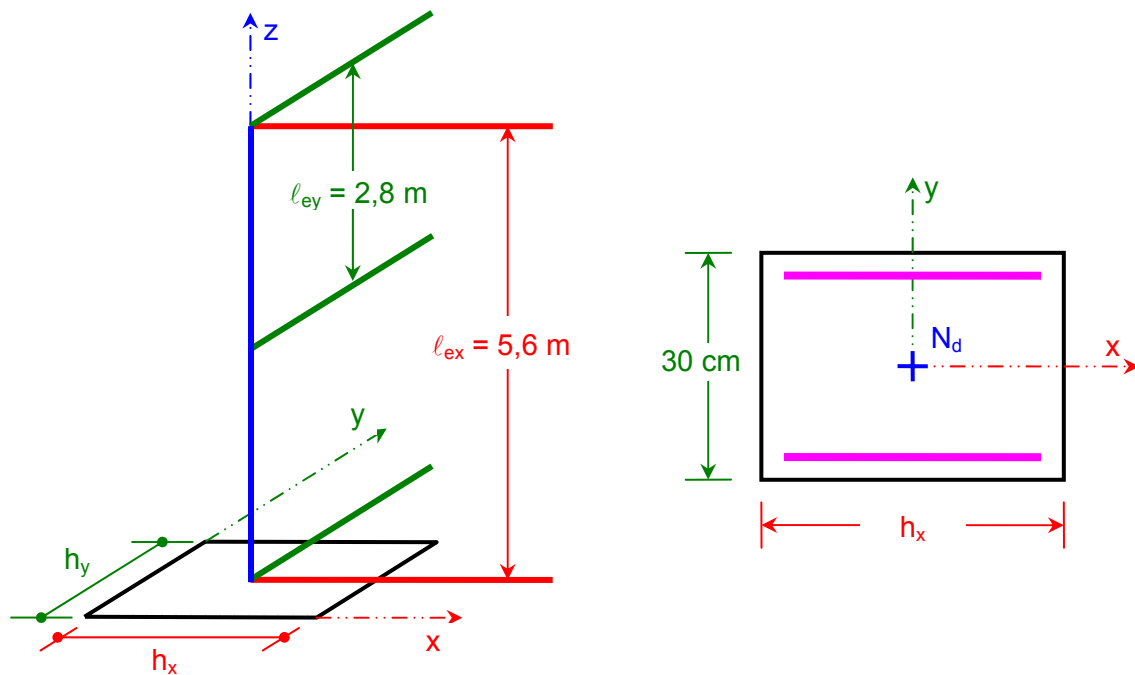
Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;

- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm; e
- diâmetro da armadura longitudinal: 16 mm.

Obs:

- obedecer rigorosamente às taxas limites de armadura estabelecidas pela ABNT NBR-6118.



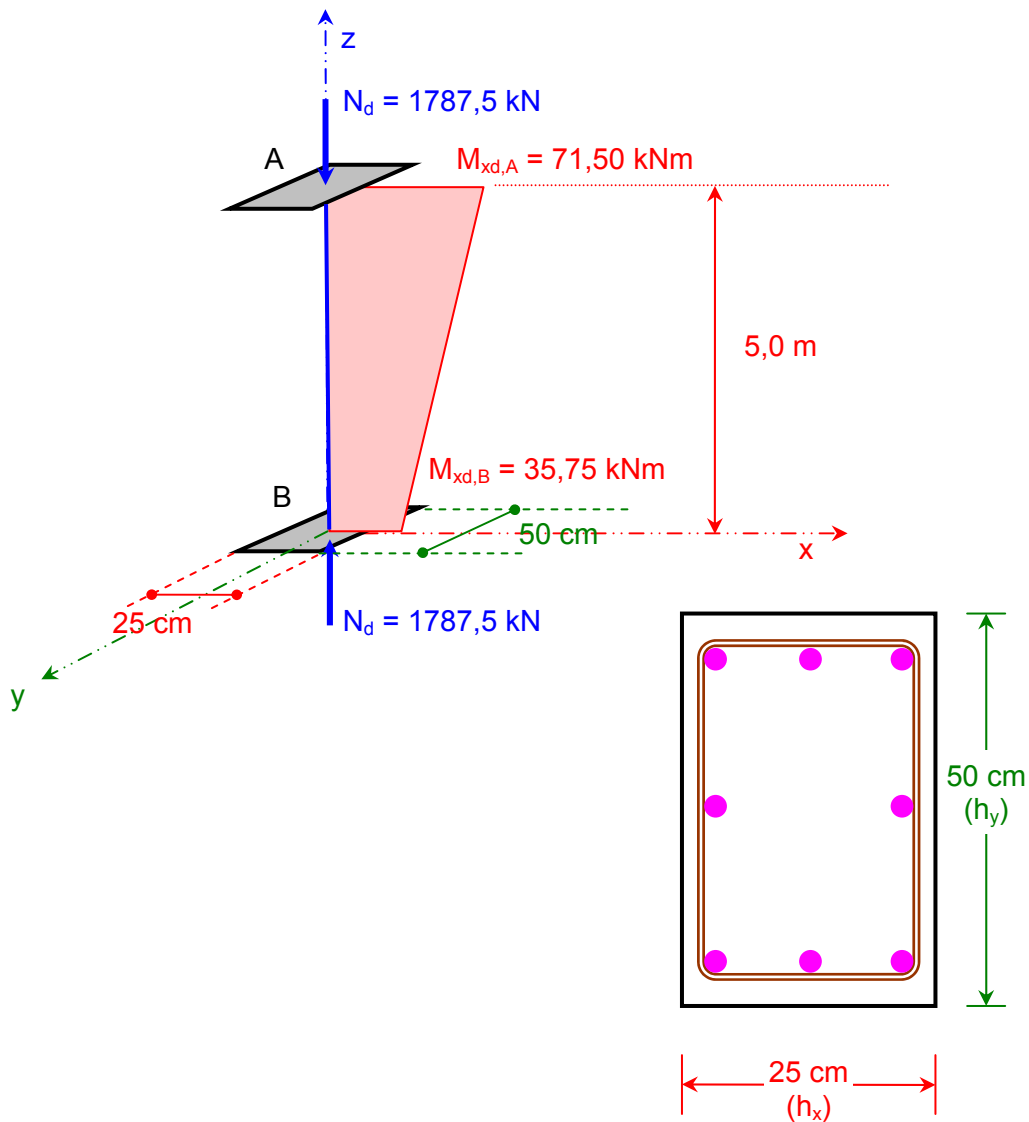
Ex. 9.11: Determinar a armadura necessária para o pilar abaixo representado.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50; e
- $d/h = 0,10$ (nas duas direções).

Obs:

- as solicitações (força normal e momentos fletores) correspondem a valores de cálculo;
- os momentos atuam no plano xz e tracionam o mesmo lado do pilar;
- o pilar tem seção transversal constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo (eixo vertical);
- o pilar é bi-rotulado, sem viga intermediária de travamento; e
- taxa máxima de armadura longitudinal do pilar igual a 4% (armadura com traspasse).



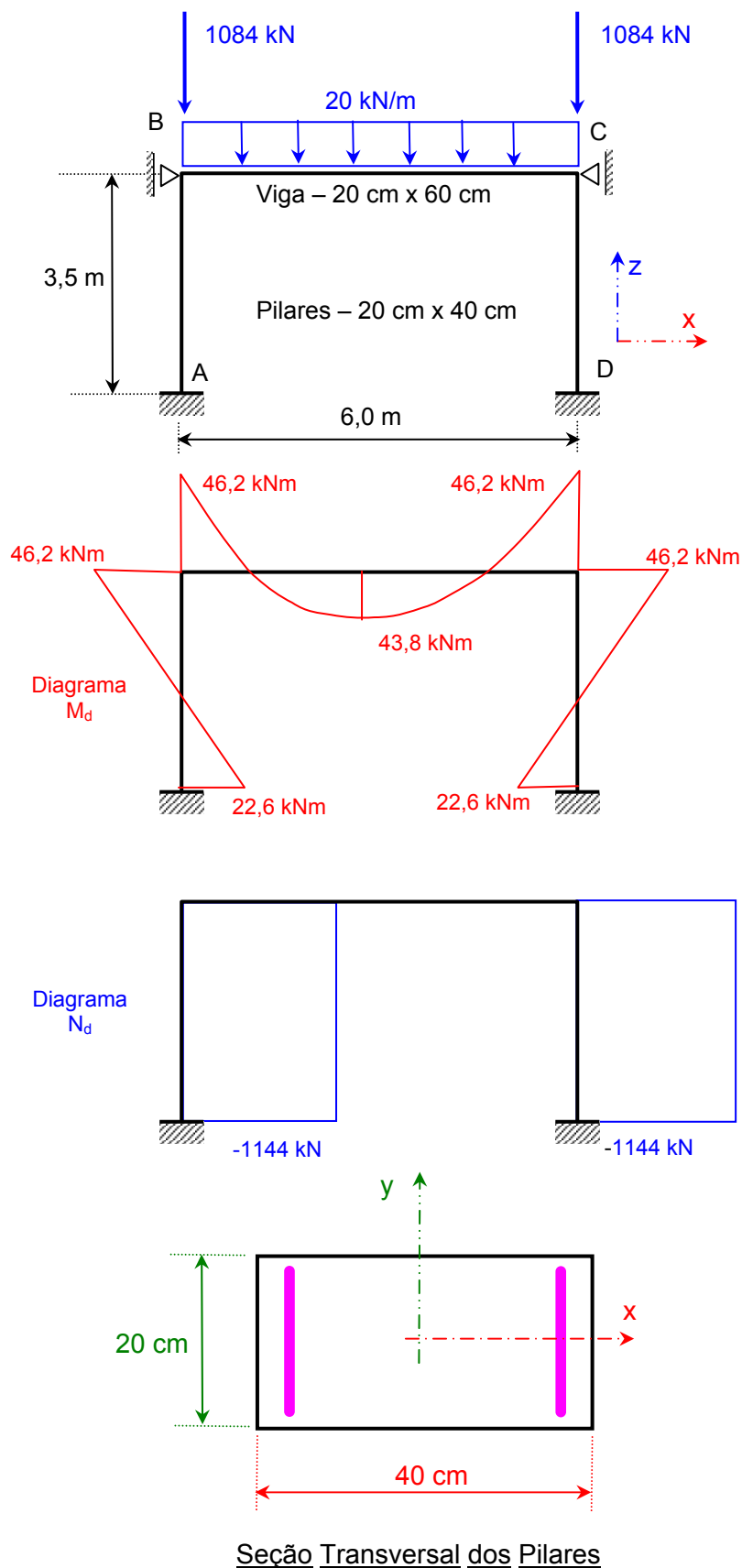
Ex. 9.12: Determinar as armaduras necessárias para os pilares AB e DC do pórtico indicado na figura.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- $d' = 0,10 h$ (nas duas direções)
- estrutura de nós fixos;
- comprimento de flambagem dos pilares $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 0,7 \times 3,5 = 2,45$ m;
- carregamento atuante com valores de cálculo para a carga permanente e para a carga acidental; e
- diagramas M_d e N_d (valores de cálculo) indicados nas figuras.

Obs:

- o pórtico está contido no plano xz;
- o pilar tem seção transversal constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo vertical; e
- taxa máxima de armadura longitudinal do pilar igual a 4% (armadura com traspasse).



Ex. 9.13: Determinar a armadura longitudinal do pilar indicado abaixo, sabendo que a força normal de cálculo (N_d), no lance em questão, é de 2250 kN e que o momento fletor de cálculo transferido pela viga V1 ao pilar (M_{sd} - momento fletor atuante no plano y), tanto no piso superior

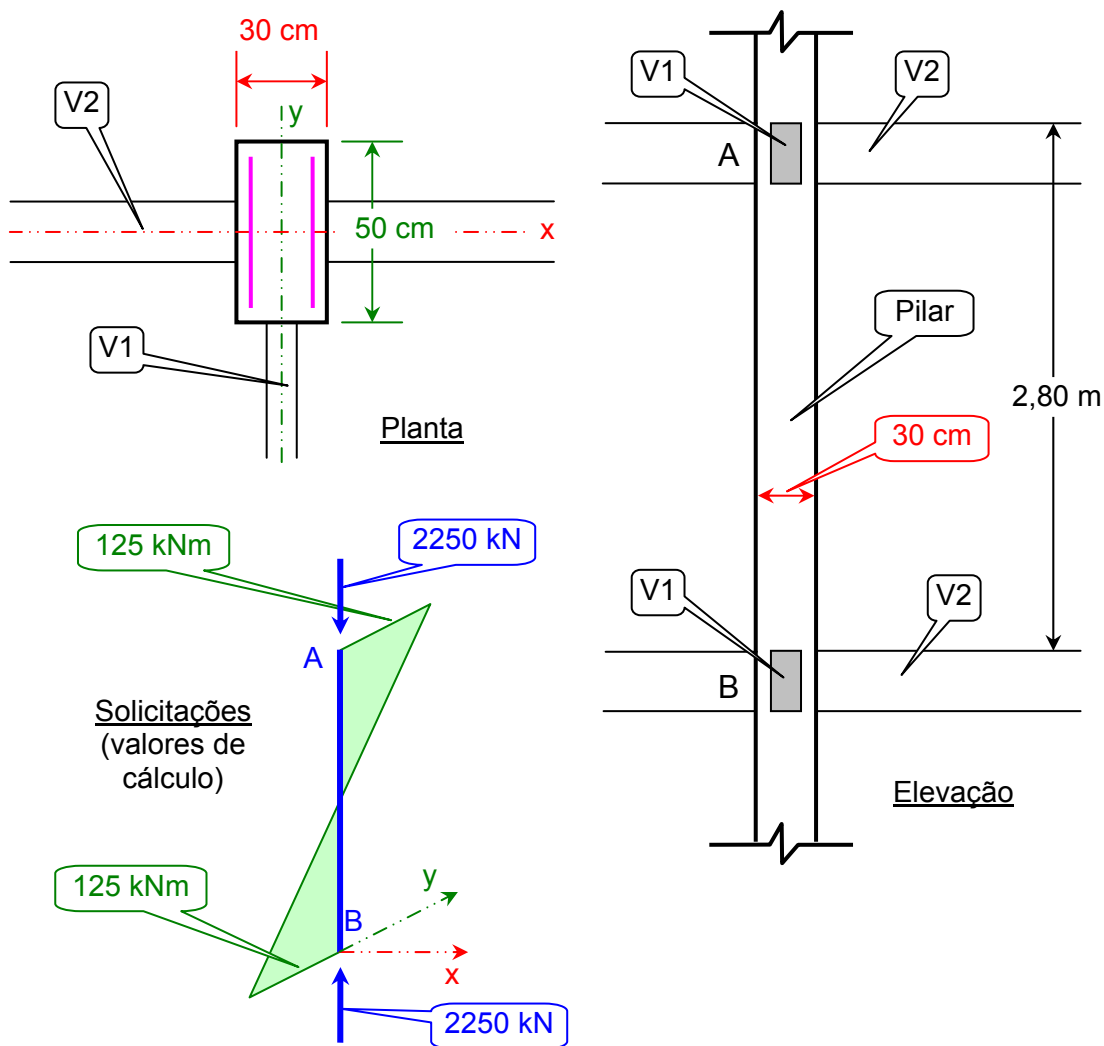
quanto no piso inferior, é de 125 kNm. A armadura do pilar deverá ser distribuída uniformemente ao longo das faces paralelas ao eixo y (metade em cada face de 50 cm).

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm; e
- diâmetro da armadura longitudinal: 16 mm.

Obs:

- considerar o pórtico como indeslocável.

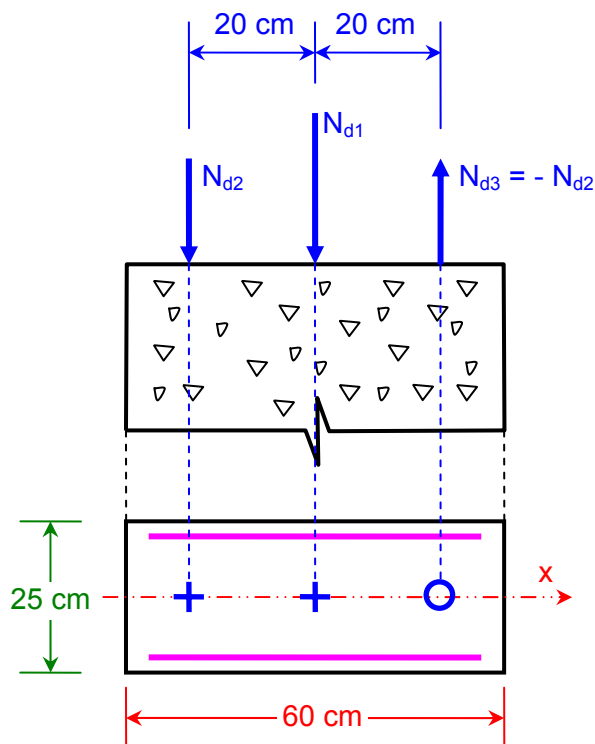


Ex. 9.14: As cargas N_{d1} , N_{d2} e N_{d3} atuam simultaneamente sobre o eixo x, tal como indicado na figura. Admitindo que a armadura longitudinal A_s seja distribuída igualmente em dois lados (paralelos ao eixo x), determine o máximo valor admissível para o conjugado N_{d2} e N_{d3} .

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm;

- armadura longitudinal: 10 ϕ 16 mm;
 - altura do pilar (comprimento de flambagem): 3,2 m; e
 - carregamento axial (N_{d1}): 1290 kN;
- Obs:
- admitir $d'_x/h_x = 0,10$ e $d'_y/h_y = 0,20$.



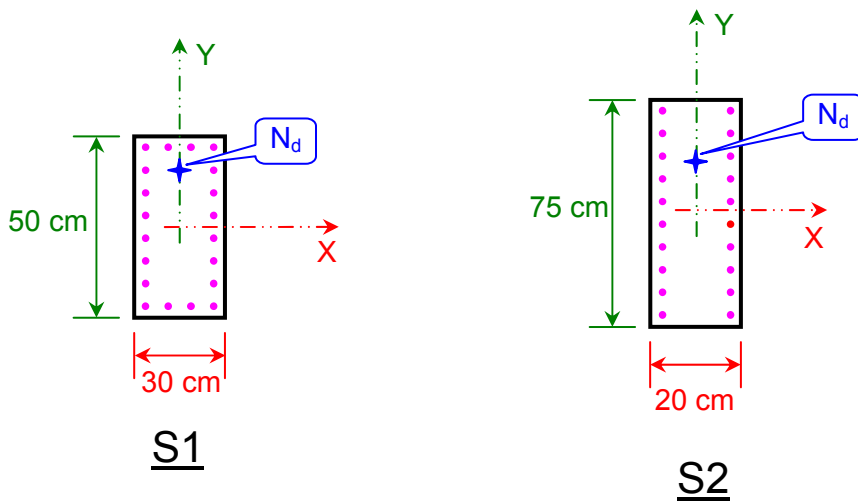
Ex. 9.15: Determinar qual das duas seções transversais de pilar, S1 ou S2, é a mais adequada (mais econômica) para o carregamento abaixo indicado. Determinar, também, qual a bitola (diâmetro) necessária para compor as barras da seção S1 e da seção S2. As seções transversais S1 e S2 tem a mesma área de concreto (1500 cm^2) e a mesma quantidade de armadura (20 barras).

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- aço: CA-50 ($\gamma_s = 1,15$);
- bitolas: 10 mm, 12,5 mm, 16 mm, 20 mm, 22 mm, 25 mm e 32 mm;
- concreto: C20 ($\gamma_c = 1,4$);
- força normal de cálculo: $N_d = 2145 \text{ kN}$;
- excentricidade (eixo y): $e_y = 7,5 \text{ cm}$;
- posição da armadura: $d' = 0,10 h$; e
- pilar curto: $\lambda < 35$.

Obs.:

- é necessário (obrigatório) efetuar as verificações em todas as direções, independentemente da existência, ou não, de excentricidades iniciais.



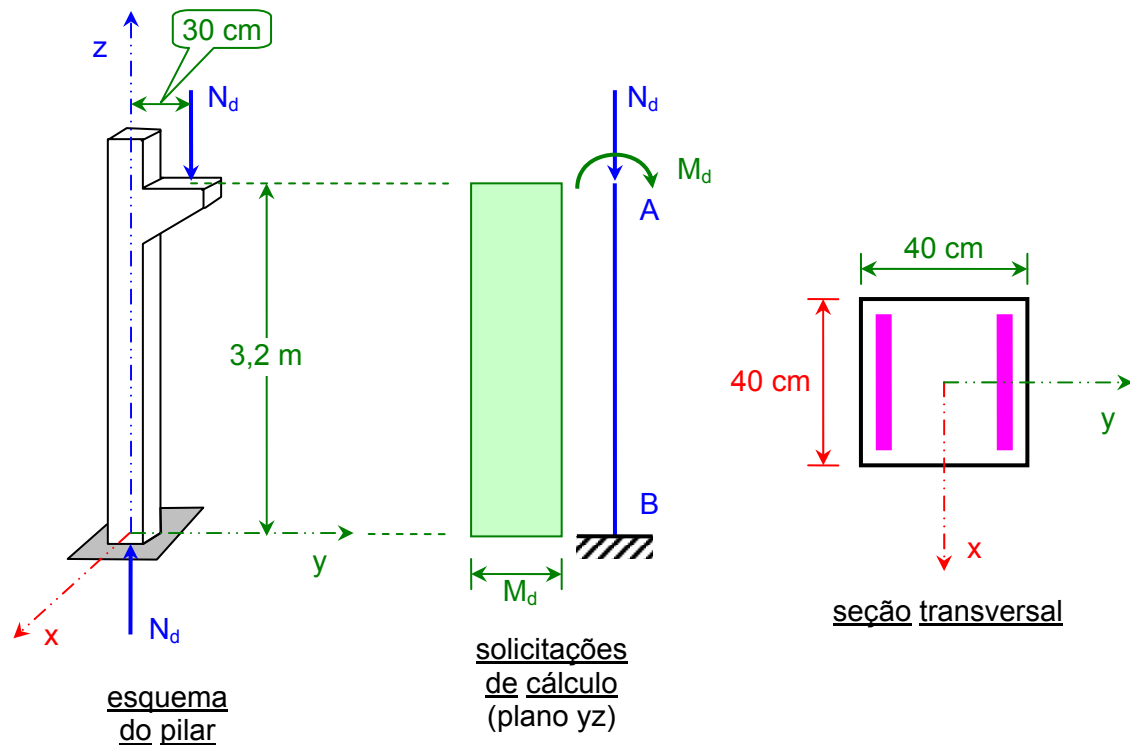
Ex. 9.16: Usando bitolas (ϕ) de 20 mm, determinar o número total de barras da armadura longitudinal que, colocadas conforme disposição indicada na seção transversal, são necessárias para o pilar pré-moldado representado na figura abaixo.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C30 ($\gamma_c = 1,40$);
- aço: CA-50 ($\gamma_s = 1,15$);
- altura do pilar: $\ell = 3,2$ m;
- força normal (eixo z): $N_{Sd} = N_d = 1028,57$ kN;
- momento fletor (plano yz): $M_{Sd} = M_{A,d} = M_{B,d}$; e
- posição da armadura: $d' = 0,10$ h.

Obs.:

- o pilar tem seção transversal constante (40 cm x 40 cm) e armadura simétrica constante (paralela ao eixo x) ao longo do eixo z;
- o pilar deve ser considerado livre no topo e engastado na base ($\ell_e = 2\ell$);
- a força normal N_d atua com uma excentricidade de 30 cm somente na direção y;
- no plano yz, o diagrama de momentos é o indicado na figura;
- no plano xz, não existem momentos provenientes do carregamento atuante; e
- no dimensionamento da armadura considerar apenas os esforços (solicitações) no plano yz.



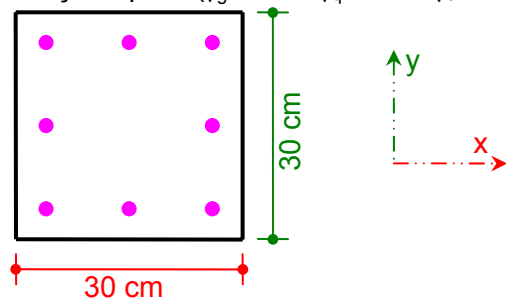
Ex. 9.17: Considere um pórtico simétrico e indeslocável de concreto armado, tal como indicado na Fig. 01. Sob a ação do vento, os pilares AB e DE comportam-se diferentemente. Os diagramas de momentos fletores de cálculo (M_{sd}) dos pilares estão representados na Fig. 02, onde estão indicadas também as forças normais de cálculo (N_{sd}) atuantes nos mesmos, forças essas consideradas como constantes ao longo de todo o comprimento dos pilares. Como o vento pode mudar de sentido, o comportamento dos pilares também se inverte. Assim, cada um deles deve ser verificado para duas situações possíveis, isto é, vento para direita e vento para esquerda. Nestas condições, determinar o diâmetro (bitola) da armadura necessária nos pilares de modo a serem atendidas as duas possibilidades de carregamento.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- $d'_x = d'_y = 4,5$ cm;
- $l_{ex} = l_{ey} = 3,0$ m; e
- estrutura de nós fixos.

Obs:

- o pórtico está contido no plano xz;
- a seção transversal do pilar está contida no plano xy;
- os pilares têm seção transversal constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo vertical (8 barras uniformemente distribuídas); e
- taxa máxima de armadura longitudinal do pilar igual a 4% (armadura com traspasse).



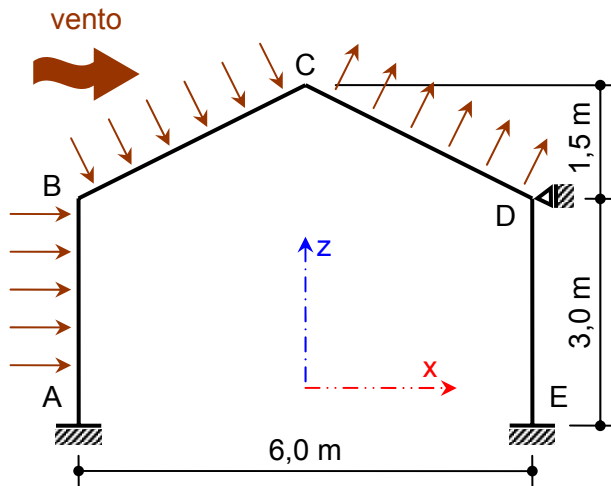


Fig. 01 – Esquema estrutural do pórtico sob ação do vento

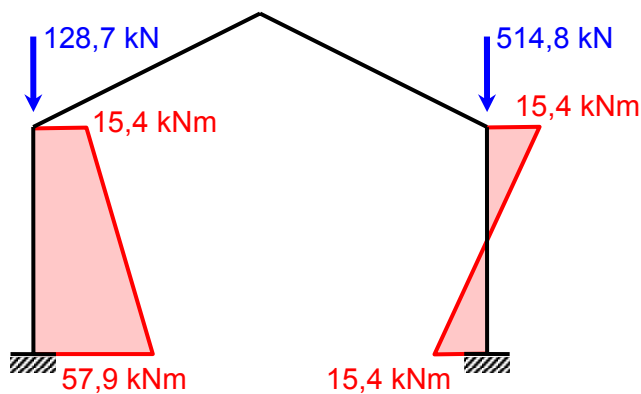
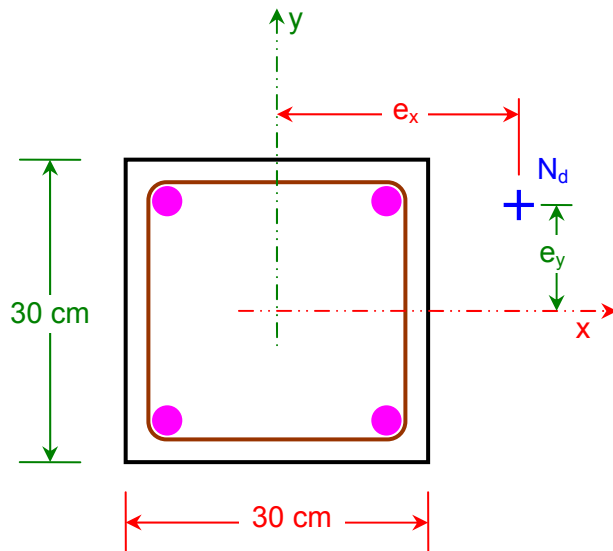


Fig. 02 – Diagramas N_{sd} e M_{sd} para os pilares AB e DE.

Ex. 9.18: Um pilar curto ($\lambda < \lambda_1$), de seção transversal 30 cm x 30 cm, suporta uma força normal de cálculo (N_d) igual a 965 kN com dupla excentricidade, sendo a excentricidade na direção y igual a 7,5 cm. Considerando que o pilar está armado com 4 barras de 20 mm, determine qual a máxima excentricidade na direção y permitida à força N_d .

Considerar:

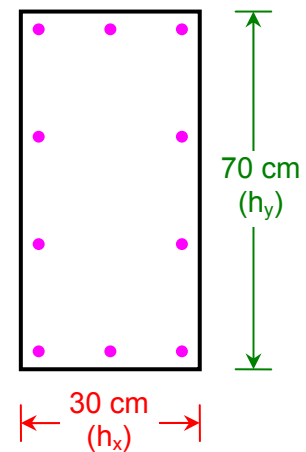
- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C25;
- aço: CA-50;
- $\alpha_b = 1,0$;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 5 mm; e
- armadura longitudinal: 4 ϕ 20 mm.



Ex. 9.19: Determinar o diâmetro da armadura para a seção transversal do pilar abaixo representado.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 6,3 mm;
- armadura longitudinal: 10 ϕ ;
- altura do pilar (comprimento de flambagem): 3 m;
- carregamento axial (N_d): 3004 kN;
- excentricidade na direção x: 3 cm; e
- excentricidade na direção y: 7 cm.



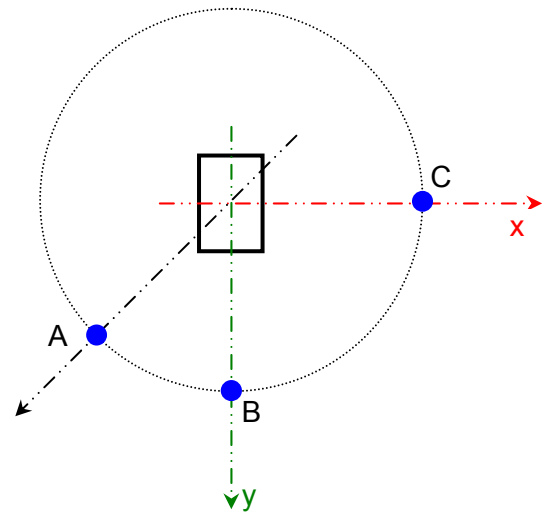
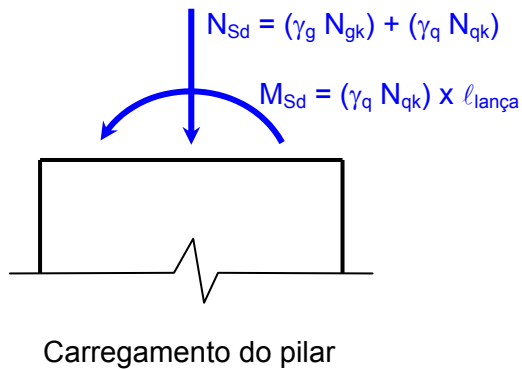
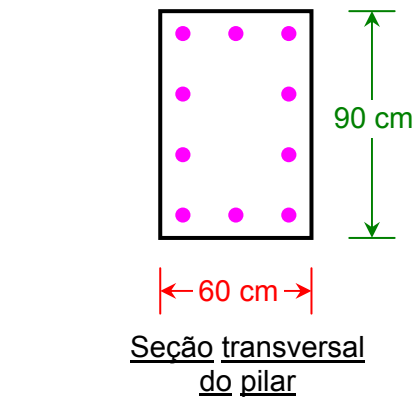
Ex. 9.20: O pilar abaixo esquematizado servirá, temporariamente, como suporte (engaste) para um guindaste cujo peso corresponde à 2284 kN (N_{gk}). Verificar se este pilar tem condições de suportar o içamento e transporte de uma carga de 100 kN (N_{qk}), distante 5,79 m ($\ell_{lan\tilde{c}a}$) do centro de giração do guindaste (centro de gravidade do pilar). O içamento da carga, após a fixação do guindaste no topo do pilar, se dará na seguinte seqüência:

- a. inicialmente a carga será parcialmente levantada na posição A (ângulo de 45° com o eixo horizontal); e
- b. posteriormente o guindaste fará uma rotação de 135° até a carga atingir a posição C, quando será totalmente içada.

A verificação das condições de segurança deverá ser feita apenas no topo do pilar (engaste do guindaste), para as posições de carga e descarga em A, B e C, não sendo necessário verificar situações intermediárias.

Considerar:

- estado limite último – combinação especial (construção) de carregamento ($\gamma_g = 1,3$; $\gamma_q = 1,2$; $\gamma_c = 1,2$; $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- $\alpha_b = 1,0$;
- cobrimento da armadura: 3 cm;
- diâmetro da armadura transversal: 8 mm;
- armadura longitudinal: 10 ϕ 32 mm; e
- altura do pilar (comprimento de flambagem): 6 m.

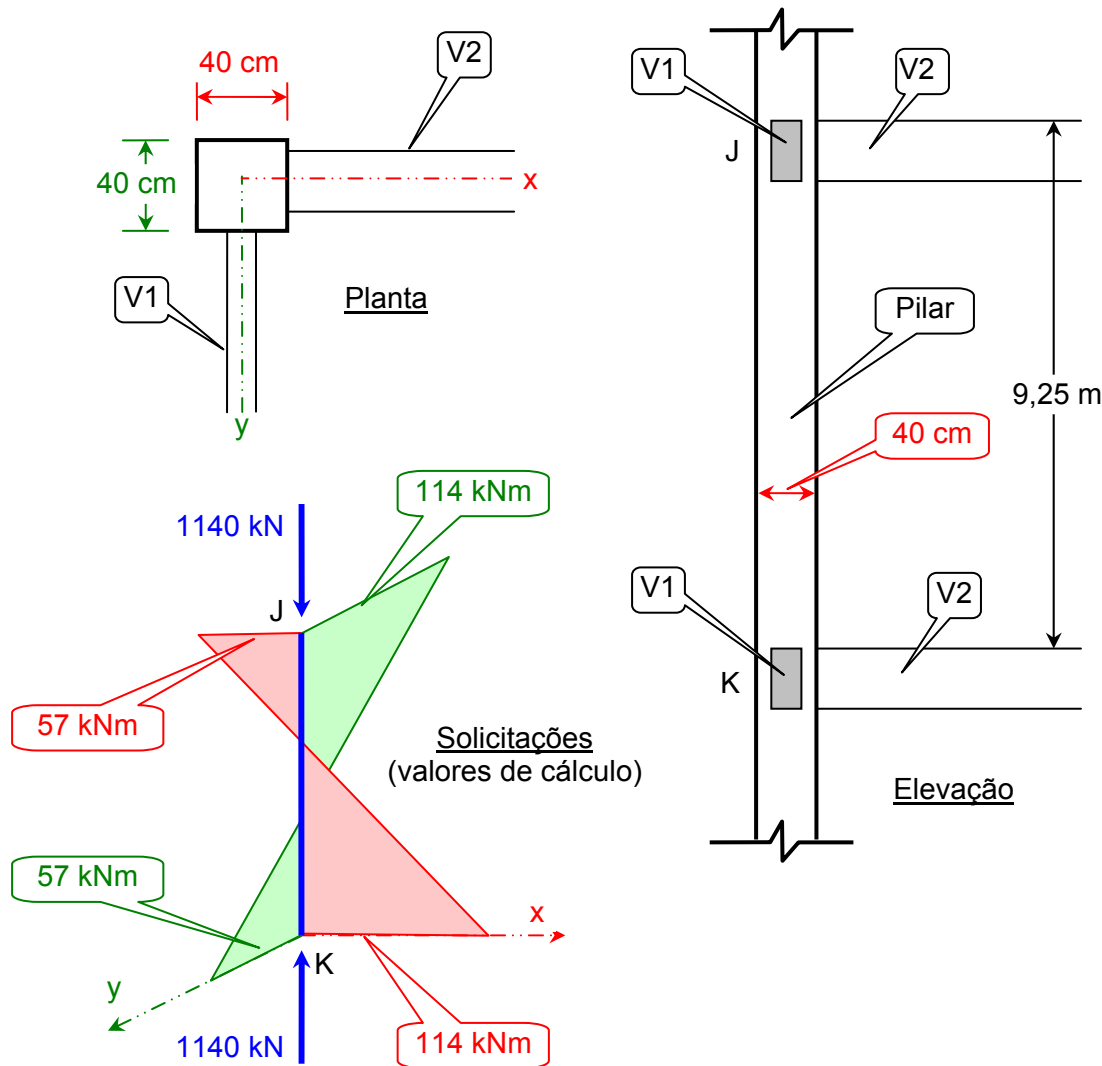


Ex. 9.21: Determinar os valores das excentricidades atuantes no topo (J), na base (K) e na seção intermediária do pilar abaixo representado. Esse pilar tem seção transversal constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. Os valores de $M_{d,tot}$, necessários para a determinação das excentricidades na seção intermediária deverão ser calculados pelo Método do Pilar Padrão para Pilares de Seção Retangular Submetidos à Flexão Composta Obliqua (Método da Rigidez κ Aproximada), considerando concreto classe C20.

$N_d = 1140 \text{ kN}$	M_{xd} kNm	M_{yd} kNm	e_x cm	e_y cm
Topo				
Intermediária				
Base				

Obs:

- as solicitações (força normal e momentos fletores) correspondem a valores de cálculo; e
- considerar efeitos de 2ª ordem, independentemente de λ_1 (ignorar λ_1 e ir diretamente ao Método da Rigidez κ Aproximada).



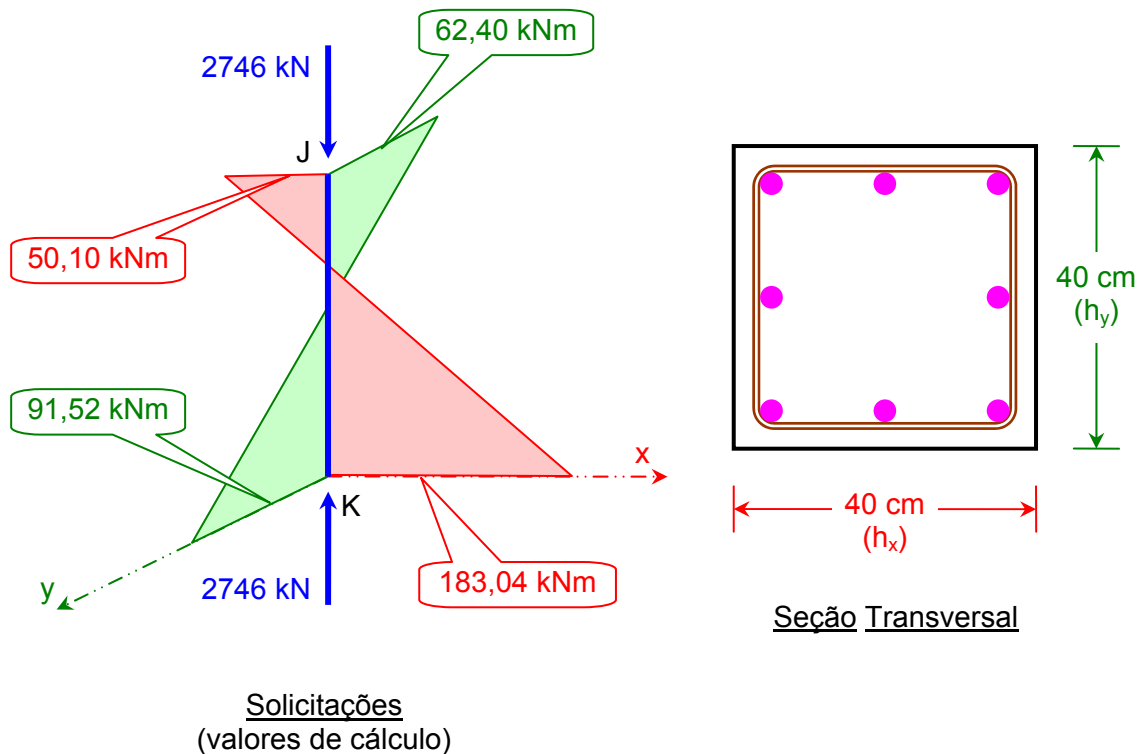
Ex. 9.22: Abaixo é representado um pilar de concreto armado com altura de um lance igual a 3,8 m e seção transversal quadrada com 40 cm x 40 cm. Considerando os esforços solicitantes de cálculo indicados abaixo e sabendo que a seção transversal do pilar terá dez barras, com a distribuição indicada na figura, pede-se a área de aço (A_s) necessária e o diâmetro (ϕ) das barras.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20 ($\gamma_c = 1,4$);
- aço: CA-50 ($\gamma_s = 1,15$);
- taxa de armadura: $A_s = 8\% A_c$; e
- $d' = 4$ cm.

Obs:

- as solicitações (força normal e momentos fletores) correspondem a valores de cálculo;
- o pilar tem seção transversal constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo (z);
- os momentos fletores 50,10 kNm e 183,04 kNm atuam no plano xz (direção x), os momentos fletores 62,40 kNm e 91,52 kNm atuam no plano yz (direção y);
- h_x corresponde à dimensão do pilar na direção x, h_y corresponde à dimensão do pilar na direção y; e
- o preenchimento do quadro abaixo é obrigatório.



$N_d = 2746 \text{ kN}$	M_{xd} kNm	M_{yd} kNm	e_x cm	e_y cm
Topo				
Intermediária				
Base				

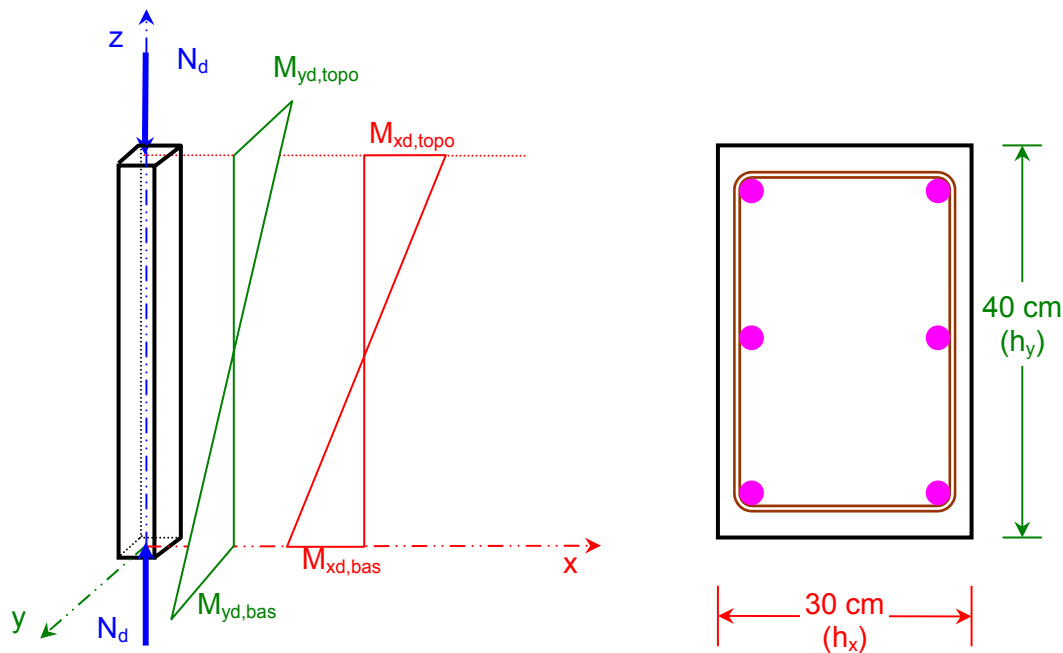
Ex. 9.23: Determinar a armadura necessária para o pilar de canto abaixo representado.

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- $d'_y = 0,05 h_y$; $d'_x = 0,10 h_x$;
- $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 5,0 \text{ m}$;
- $N_d = 686 \text{ kN}$; e
- $M_{xd,topo} = M_{xd,base} = M_{yd,topo} = M_{yd,base} = 102,9 \text{ kNm}$.

Obs:

- as solicitações (força normal e momentos fletores) correspondem a valores de cálculo;
- o pilar tem seção transversal constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo (eixo vertical);
- os momentos $M_{xd,topo}$ e $M_{xd,base}$ estão contidos no plano xz;
- os momentos $M_{yd,topo}$ e $M_{yd,base}$ estão contidos no plano yz;
- o pilar é bi-rotulado, sem viga intermediária de travamento; e
- taxa máxima de armadura longitudinal do pilar igual a 4% (armadura com traspasse).



Ex. 9.24: Para o pilar abaixo indicado determinar:

- o máximo valor da força normal característica N_k que o mesmo é capaz de suportar; e
- os momentos fletores característicos máximos correspondentes a N_k , nas direções x e y .

Considerar:

- estado limite último, combinações normais, edificação tipo 2 ($\gamma_g = 1,4$, $\gamma_q = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$);
- concreto: C20;
- aço: CA-50;
- diâmetro da armadura: 22 mm; e
- $d'_y = 0,15 h_y$; $d'_x = 0,15 h_x$.

Obs:

- admitir que a condição indicada na figura atende a todas as verificações exigidas por norma com relação a esbeltez e, portanto, as excentricidades incluem valores de 2ª ordem, se for o caso; e
- admitir, para efeito de uniformização de uso de ábaco, que f_{cd} seja igual a 14 MPa.

