Sistemas de Numeração e Erros

Os números representáveis em qualquer máquina são finitos, ou melhor, não é possível representar em um computador todos os números de um dado intervalo [a, b]. O resultado de um simples cálculo de uma função, realizado com esses números, podem conter erros.
Esses erros causados podem diminuir e, algumas vezes, destruir a precisão dos resultados.

Representação de um Número Inteiro

Assim dado um número inteiro n≠0, ele possui uma única representação:

$$n = \pm(n_k\ n_{k-1}\ n_{k-2} \ldots n_1\ n_0) = \pm(n_0\beta^0 + n_1\beta^1 + \ldots + n_{k-2}\beta^{k-2} + n_{k-1}\beta^{k-1} + n_k\beta^k)$$

onde

β é um número inteiro ≥ 2, chamada base.

n_i são inteiros tal que $0 \leq n_i < \beta$ e $n_k \neq 0$

Exemplos:

o número 1967 é representado na base 10 como:

$$(1967)_{10} = 7x10^0 + 6x10^1 + 9x10^2 + 1x10^3 = (1967)_{10}$$

já o número 1101 na base 2 é:

$$(1101)_2 = 1x2^0 + 0x2^1 + 1x2^2 + 1x2^3 = 1 + 0 + 4 + 8 = (13)_{10}$$

Representação de um Número Real

No computador, existem duas representações de um número real: Ponto Fixo e Ponto Flutuante.

a) Ponto Fixo

Um número x≠0 será representado em ponto fixo assim:

$$x = \pm\sum_{i=k}^{n} x_i \beta^{-i}$$

onde k e n são inteiros sendo k<n e usualmente k≤0 e n>0 e os x_i são inteiros tal que $0 \leq x_i < \beta$

Exemplo:

$$1967{,}25 = \sum_{i=-3}^{2} x_i \beta^{-i} = 1x10^3 + 9x10^2 + 6x10^1 + 7x10^0 + 2x10^{-1} + 5x10^{-2}$$

Esse sistema foi usado por muitos computadores no passado e, hoje, não é mais utilizado.

b) Ponto Flutuante

Um número x≠0 será representado em ponto flutuante assim:

$$x = \pm d \times \beta^e$$

onde β é a base, **d** é a mantissa e **e** é o expoente. A mantissa, **d**, é um número em ponto fixo:

$$d = \pm\sum_{i=k}^{t} d_i \beta^{-i}$$

onde **k** é geralmente igual a 1, tal que x≠0, então $d_i \neq 0$ (forma normalizada). A quantidade de dígitos é igual a **t**, com $\beta^{-1} \leq d < 1$.

Exemplos:

a) $0{,}35 = (3x10^{-1} + 5x10^{-2})x10^0 = 0{,}35x10^0$

b) $-5{,}172 = (5x10^{-1} + 1x10^{-2} + 7x10^{-3} + 2x10^{-4})x10^1 = -0{,}5172x10^1$

c) $0{,}0123 = (1x10^{-1} + 2x10^{-2} + 3x10^{-3})x10^{-1} = 0{,}123x10^{-1}$

d) $0{,}0003 = (3x10^{-1})x10^{-3} = 0{,}3x10^{-3}$

e) $5391{,}3 = (5x10^{-1} + 3x10^{-2} + 9x10^{-3} + 1x10^{-4} + 3x10^{-5})x10^4 = 0{,}53913x10^4$

Para simplificar a representação de um sistema de números em ponto flutuante normalizado, na base β, com t dígitos significativos e com limites do expoente m e M , usaremos a notação: F(β, t,m,M).
Assim um número em F(β, t, m,M) será representado por:

$$\pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t \times \beta^e$$

onde $d_1 \neq 0$ e $-m \leq e \leq M$.

Exemplo - Considere o sistema F(10, 3, 2, 2). Represente nesse sistema os números:

a) $0{,}35 = 0{,}350 x 10^0$

b) $-5{,}172 = -0{,}517 x 10^1$

c) $0{,}0123 = 0{,}123 x 10^{-1}$

d) $0{,}0003 = \left(3 x 10^{-1}\right) x 10^{-3} = \nexists$ no F(10,3,2,2)

e) $5391{,}3 = \left(5 x 10^{-1} + 3 x 10^{-2} + 9 x 10^{-3} + 1 x 10^{-4} + 3 x 10^{-5}\right) x 10^4 = \nexists$ no F(10,3,2,2)

Observe que o número 0,0003 não pode ser representado no sistema, pois o expoente é menor que -2 causando **underflow**. Já o número 5391,3 não pode ser representado no sistema, pois o expoente é maior que 2, causando **overflow.**

Mudança de Base

Um número pode ser representado em mais de uma base. Através de uma mudança de base, é possível determinar a representação em uma nova base.

Exemplo: Mudar a representação dos números:

a) 1101 da base 2 para a base 10

Solução: $(1101)_2 = 1x2^0 + 0x2^1 + 1x2^2 + 1x2^3 = 1 + 0 + 4 + 8 = (13)_{10}$

b) 0,110 da base 2 para a base 10

Solução: $(0{,}110)_2 = 1x2^{-1} + 1x2^{-2} + 0x2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = (0{,}75)_{10}$

c) 13 da base 10 para a base 2

$$\begin{array}{lllll} 13 & \underline{|\,2} & & & \\ \mathbf{1} & 6 & \underline{|\,2} & & \\ & \mathbf{0} & 3 & \underline{|\,2} & \\ & & \mathbf{1} & 1 & \underline{|\,2} \\ & & & \mathbf{1} & 0 \end{array}$$

Solução: O número na base 2 será obtido tomando-se todos os restos das divisões: $(13)_{10} = (1101)_2$

d) 0,75 da base 10 para a base 2

$$\begin{array}{lll} 0{,}75 & \times 2 = & \mathbf{1}{,}50 \\ 0{,}50 & \times 2 = & \mathbf{1}{,}00 \\ 0{,}00 & \times 2 = & \mathbf{0}{,}00 \end{array}$$

Solução: O número na base 2 será obtido tomando-se a parte inteira do resultado de cada multiplicação.
Assim: $(0{,}75)_{10} = (0{,}110)_2$

e) 3,8 da base 10 para a base 2 $\quad (3{,}8)_{10} = (11{,}11001100\ldots)_2$

f) 12,20 da base 4 para a base 3 $\quad (12{,}20)_4 = (20{,}111\ldots)_3$

Exercícios

a) Considere os números x_1=34, x_2=0,125 e x_3=33,023 que estão na base 10. Escreva-os na base 2.

b) Considere os números x_1=110111, x_2=0,01011 e x_3=11,0101 que estão na base 2. Escreva-os na base 10.

c) Considere os números x_1=33, x_2=0,132 e x_3=32,013 que estão na base 4. Escreva-os na base 5.